小数展開の一意性と空間の連結性
Uniqueness of Decimal Expansions and Connectedness of Spaces

y.*

2019 年 7 月 9 日

最終更新日: 2019 年 7 月 9 日

概要

よく知られているように，実数の小数展開は $0.999\cdots = 1.000\cdots$ のように一意性をみたさない．一方で，Cantor 集合上での 1 を用いない 3 進小数展開や p 進数の p 進展開は一意的である．ここでそれぞれの数空間に入る位相について，実数体 $\mathbb{R}$ は連結であり，Cantor 集合や p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ は完全不連結である．本稿では小数展開や p 進展開を木を用いて一般化し，一意的な小数展開の存在が空間の完全不連結性を導くことを証明する．

目次

* http://iso.2022.jp/

1　導入・具体例

ここでは実数の小数展開について復習しつつ，様々な位相空間における “小数展開” の具体例を見ていく．本節ではあまり細かい証明はしないので，わからないところは飛ばして続きを読んでほしい．

1.1　数直線 $\mathbb{R}$

まず実数の小数展開について軽く復習しておこう．詳細については例えば杉浦 [2, 第 1 章 §3] などの基本的な教科書を参照のこと．

任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ は 10 進小数展開

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}) \tag{$*$}$$

を持つことが Cantor の区間縮小法によって証明できる．また逆に，任意の $a_0 \in \mathbb{Z}$ と $\{0, 1, \dots, 9\}$ の無限列 $(a_n)_{n \geq 1}$ に対し，$(*)$ の級数がある実数に収束することが，等比級数の和の公式と Weierstrass の定理 (上に有界な単調増加数列は上限に収束する) ことからわかる．一つの実数の 10 進小数展開は一意的とは限らない．実際，等比級数の和の公式から

$$0.999\cdots = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \frac{1/10}{1 - 1/10} = 1 = 1.000\cdots$$

となる．[*1] 以上の議論は底 10 を別の自然数 $m \geq 2$ に置き換えても全く同様である．

$\mathbb{R}$ は絶対値から定まる通常の距離に関して完備距離空間であり，この距離から定まる距離位相について連結空間になる．

1.2　Cantor 集合 C

各自然数 n, k に対して開区間 I_{nk} を

$$I_{nk} = \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$$

と定義する．**Cantor 集合** C を

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} I_{nk}$$

と定義する．C の任意の元 x は 1 を用いない 3 進小数展開

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad (a_n \in \{0, 2\})$$

によって一意的に書き表すことができる．C は $\mathbb{R}$ の閉集合だから完備距離空間であり，さらに有界でもあるから Heine-Borel の被覆定理よりコンパクトである．また C は完全分離空間ゆえ Stone 空間である．

Cantor 集合 C は上の小数展開によって Cantor 空間 2^ω と同相である．

[*1] $\mathbb{R}$ の小数展開が一意的でないことは次のような位相的な議論によってもわかる．$a \in \{0, 1, \dots, 9\}$ に対し，$0.a$ から始まる小数展開を持つ $\mathbb{R}$ の元全体はそれぞれ閉集合をなす．仮に $\mathbb{R}$ の小数展開が一意的であると仮定すると $\mathbb{R}$ が連結であることに矛盾する．

1.3　無理数 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

無理数全体の集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ には $\mathbb{R}$ からの相対位相によって自然に位相が入る．任意の無理数 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は一意的な無限連分数展開

$$
\begin{aligned}
x &= [a_0; a_1, a_2, \dots] \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Z}_{>0})
\end{aligned}
$$

を持つ．$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上には

$$d([a_0; a_1, a_2, \dots], [b_0; b_1, b_2, \dots]) = 2^{-\min\{\, n \mid a_n \neq b_n \,\}}$$

によって距離 d が定まる．この距離による距離位相は $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の元の位相と一致し，さらに $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, d)$ は完備距離空間である．

また $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は連分数展開によって集合論における Baire 空間 $\mathcal{N} = \omega^\omega$ と同相である．

1.4　p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$

p 進数の詳細については例えば雪江 [3] などの整数論の教科書を参照のこと．

素数 p を固定する．有理数 $x \in \mathbb{Q}$ は p で割り切れない $a, b \in \mathbb{Z}$ によって $x = p^m \cdot b/a$ $(m \in \mathbb{Z})$ の形に一意的に書ける．この整数 m を $\operatorname{ord}_p(x)$ で表す．$x \in \mathbb{Q}$ の p 進絶対値を

$$|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(x)}$$

と定めると $(\mathbb{Q}, |\ \ |_p)$ はノルム空間になり，その完備化を p 進数体と呼び，$\mathbb{Q}_p$ で表す．任意の p 進数 $x \in \mathbb{Q}_p$ は一意的な p 進展開

$$
\begin{aligned}
x &= \cdots a_2 a_1 . a_0 \cdots a_{n_0} \\
&= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n p^n \quad (n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\})
\end{aligned}
$$

を持つ．

$\mathbb{Q}_p$ の単位閉球 $\{\, x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1 \,\}$ を p 進整数環と呼び，$\mathbb{Z}_p$ で表す．$\mathbb{Z}_p$ はコンパクトである．

1.5　実数の自然数展開

$\mathbb{R}$ の通常の m 進小数展開は各桁の選び方が有限通りであり，小数展開は一意的ではない．一方で，各桁の選択肢を無限個に増やすと小数展開を一意的にできることが知られている．

例 1.1 (実数の自然数展開 [1, 第 9 講]).　実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し，整数 $a_0 \in \mathbb{Z}$ と自然数列 $(a_n)_{n \geq 1}$ を次のようにして対応させる．まず，x の整数部分 $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ を a_0 とする．x の小数部分 $y = x - \lfloor x \rfloor$ は半開区間 $[0, 1)$ の元である．$[0, 1)$ を可算個の半開区間

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right), I_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), I_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \dots, I_n = \left[1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+2}\right), \dots$$

に分割する．このとき y が属する区間がただ一つだけ存在するので，その区間を I_{a_0} とする．$[0,1)$ から I_{a_0} への全単射な一次関数 $f_0\colon [0,1) \to I_{a_0}$ をとる．I_{a_0} は f_0 によって縮小された可算個の半開区間

$$f_0(I_0), f_0(I_1), f_0(I_2), \ldots, f_0(I_n), \ldots$$

に分割される．このとき y が属する区間がただ一つだけ存在するので，その区間を $f_0(I_{a_1})$ とする．次に $[0,1)$ から $f_0(I_{a_1})$ への全単射な一次関数 $f_1\colon [0,1) \to f_0(I_{a_1})$ をとる．再び $f_0(I_{a_1})$ は可算個の半開区間

$$f_1(I_0), f_1(I_1), f_1(I_2), \ldots, f_1(I_n), \ldots$$

に分割され，y が属するただ一つの区間を $f_1(I_{a_2})$ とする．以下同様に繰り返して $a_3, a_4, \ldots$ を定めると，それに伴って y を含む半開区間の縮小列 $I_{a_0} \supsetneq f_0(I_{a_1}) \supsetneq f_1(I_{a_2}) \supsetneq \cdots$ が得られる (図 1)．以上によって作ら

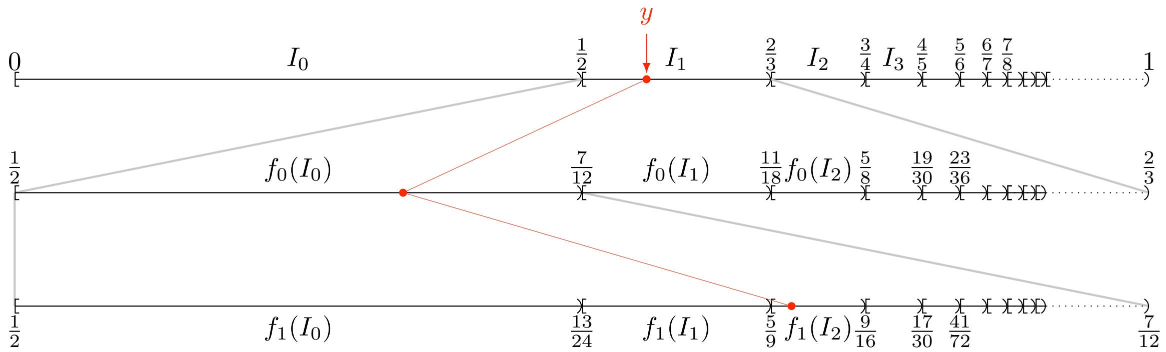

図 1　$y = \sqrt{9/29}$ の自然数展開

れた列 $a_0a_1a_2\cdots$ を実数 $x \in \mathbb{R}$ の自然数展開という．

次に任意に列 $a_0a_1a_2\cdots$ をとり，対応する半開区間の減少列を $[l_0, r_0) \supsetneq [l_1, r_1) \supsetneq [l_2, r_2) \supsetneq \cdots$ とする．ここで可算個の半開区間のとり方から必ず $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots$ となることに注意すると，Cantor の区間縮小法と同様にして $\bigcap_{n\geq 0}[l_n, r_n)$ がただ一つの点からなることが示せる．[*2]

2　木による小数展開

小数展開や p 進展開を一般化して統一的に取り扱う方法は色々と考えられるだろうが，本稿では (記述集合論における) 木を用いた定式化を試みる．

2.1　木とパス

$\omega = \{0, 1, \ldots\}$ を自然数[*3]全体の集合とする．$\omega^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega}\omega^n$ を自然数の有限列全体の集合とする．つまり，

$$\omega^{<\omega} = \{(), (0), (1), (2), \ldots, (0,0), (0,1), (0,2), \ldots, (1,0), (1,1), (1,2), \ldots, (0,0,0), \ldots\}$$

[*2] 一般には半開区間の減少列の交わりが空になることもある．実際，$\bigcap_{n\geq 0}[1-1/n, 1) = \emptyset$．

[*3] 本稿では自然数に 0 を含める．

である．有限列 $\sigma \in \omega^n$ の長さ n を $\mathrm{lh}(\sigma)$ という記号で表す．2 つの有限列 $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_n)$ の**連結** (concatenation) を

$$(a_1, \dots, a_m)^\frown(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$$

で表す．以下では小数展開を考える都合上，自然数の有限列 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \omega^n$ を，括弧やカンマを省いて単に $a_1a_2\cdots a_n$ と書くことがある．[*4] また，n 元集合 $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ から ω への関数 $\omega\colon n \to \omega$ を長さ n の自然数列 $(\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n-1)) \in \omega^n$ と同一視する．長さ n の列 $\sigma \in \omega^n$ と $m \le n$ について，σ の関数としての $m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ への制限を $\sigma{\restriction}m = (\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(m-1))$ で表す．

以上のことは有限列が無限列になっても同様である．ω^ω を自然数の無限列全体の集合とする．関数 $f\colon \omega \to \omega$ は無限列 $(f(0), f(1), \dots) \in \omega^\omega$ と同一視できる．

2 つの元 $\sigma, \tau \in \omega^{<\omega}$ に対し，σ が関数として τ の制限になっていることを $\sigma \preccurlyeq \tau$ で表す．言い換えると，$\sigma \preccurlyeq \tau$ は τ が σ の後ろに有限列を付け加えたものになっている，あるいは同じことだが，σ が τ の後ろの何桁かを切り落としたものになっているということを意味する．τ が無限列 $f \in \omega^\omega$ の場合も同様に定義する．つまり，$\sigma \preccurlyeq \tau$ とは $\sigma = \tau{\restriction}\mathrm{lh}(\sigma)$ ということである．$\sigma \preccurlyeq \tau$ であるとき，σ を τ の**始切片** (initial segment) と呼ぶ．例えば，

$$() \preccurlyeq 1 \preccurlyeq 14 \preccurlyeq 141 \preccurlyeq 1414213 \preccurlyeq 1414213562370\cdots,$$
$$123 \not\preccurlyeq 132 \not\preccurlyeq 13 \not\preccurlyeq 512 \not\preccurlyeq ()$$

などが成り立つ．$\preccurlyeq$ は $\omega^{<\omega} \cup \omega^\omega$ 上の順序関係である．

以上の表記法のもとで，木を定義する．

定義 2.1 (木). 木 (tree) とは，自然数の有限列の集合 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ であって始切片で閉じているもの，すなわち

$$\forall \tau \in T\, \forall \sigma \in \omega^\omega [\sigma \preccurlyeq \tau \implies \sigma \in T]$$

をみたすものである．木 T の**パス** (path) とは，無限列 $f \in \omega^\omega$ であって f の任意の有限な始切片が T の元であるもの，すなわち

$$\forall n \in \omega [f{\restriction}n \in T]$$

をみたすものである．木 T のパス全体の集合を $[T]$ で表す．

任意の $\sigma \in T$ に対し，$\sigma^\frown i \in T$ となる i が有限個であるような木 T を**有限分岐木** (finite-branching tree) と呼ぶ．また，ある $n \in \omega$ が存在して長さ n 以上の任意の $\sigma \in T$ に対して $\sigma^\frown i \in T$ なる i が有限個であるような木 T を本稿では**いずれ有限分岐木** (eventually finite-branching tree) と呼ぶことにする．

例 2.2. 例えば $T_1 = \omega^{<\omega}$ 自身は木であり，このとき $[T_1] = \omega^\omega$ である．また，$2 = \{0, 1\}$ の有限列全体の集合 $T_2 = 2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$ も木であり，$[T_2] = 2^\omega$ である．T_2 は有限分岐木であるが，一方で T_1 はいずれ有限分岐木でさえない．

2.2 木と位相

ω に離散位相を入れて位相空間とみなす．このとき ω^ω に直積位相を入れてできる空間を (集合論における) **Baire 空間** (Baire space) と言い $\mathcal{N}$ で表す．木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ に対し，T のパス全体 $[T] \subseteq \omega^\omega$ には Baire 空間

[*4] 空列は省略のしようがないので () のままにする．

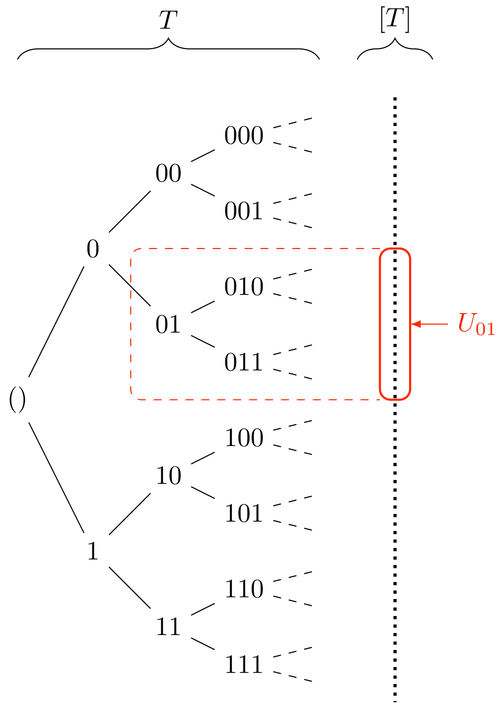

図 2　$T = 2^{<\omega}, [T] = 2^{\omega}$

$\mathcal{N}$ からの相対位相を入れる．直積位相の定義より，$[T]$ の開基を

$$U_\sigma = \{\, f \in [T] \mid \sigma \preccurlyeq f \,\} \quad (\sigma \in T)$$

の形でとることができる．ω が離散空間であることより，各 U_σ は閉集合でもあることに注意する．位相の入れ方から特に $[T]$ は完全分離空間であり，したがって完全不連結 Hausdorff 空間である．任意のパス $f \in [T]$ に対し，$\{\, U_\sigma \mid \sigma \preccurlyeq f \,\}$ は f の可算な基本近傍系であるので $[T]$ は第一可算公理をみたす．

次に，パス全体 $[T]$ がいつコンパクト空間になるかを考える．Baire 空間 $\mathcal{N}$ 自体はコンパクトではない．一般には次が成り立つ．

命題 2.3.　任意の木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ に対し，以下は同値である．

1. $[T]$ はコンパクトである．
2. T は有限分岐木である．

証明. (1 $\Longrightarrow$ 2).　対偶を示す．T が有限分岐木でないとすると，ある $\sigma \in T$ が存在して，σ の直後の元全体の集合

$$S = \{\, i \in \omega \mid \sigma^\frown i \in T \,\}$$

が無限集合になる．U_σ は $[T]$ の閉集合であり，$\{\, U_{\sigma^\frown i} \mid i \in S \,\}$ は U_σ の開被覆であるが明らかに有限部分被覆を持たない．よって $[T]$ はコンパクトでない閉集合 U_σ を持つので，$[T]$ 自身もコンパクトではない．

(2 $\Longrightarrow$ 1).　開基からなる $[T]$ の開被覆 $(U_\sigma)_{\sigma \in I}$ を任意にとる．$I \subset T$ であるとしてよい．$\preccurlyeq$ に関する I の極

小元全体の集合を

$$I_0 = \{ \sigma \in I \mid \nexists \tau \in I[\tau \preccurlyeq \sigma, \sigma \neq \tau] \}$$

とおく．任意の $\sigma \in I$ に対し，σ の始切片は有限個 (正確には $\mathrm{lh}(\sigma)+1$ 個) だから $\sigma_0 \preccurlyeq \sigma$ なる $\sigma_0 \in I_0$ が必ず存在する．このとき $U_{\sigma_0} \supseteq U_\sigma$ であり，$\sigma \in I$ は任意だったから $\bigcup_{\sigma_0 \in I_0} U_{\sigma_0} = \bigcup_{\sigma \in I} U_\sigma = [T]$ となるので $(U_{\sigma_0})_{\sigma_0 \in I_0}$ は $(U_\sigma)_{\sigma \in I}$ の部分被覆である．極小性より I_0 の相異なる任意の 2 元は比較不能である．I_0 が有限集合であることを示せばよい．仮に I_0 が無限集合であるとすると，I_0 から生成される T の部分木

$$T_0 = \{ \tau \in T \mid \exists \sigma \in I_0[\tau \preccurlyeq \sigma] \}$$

は I_0 を含むので無限木である．一方で仮定から T_0 は有限分岐木だから，König の補題より T_0 はパスを持つ，すなわち $[T_0] \neq \emptyset$ となる．これは I_0 の相異なる任意の 2 元が比較不能であることと矛盾している． □

よって例えば $T = 2^{<\omega}$ は有限分岐木なので $[T] = 2^\omega$ はコンパクトである．実際，2^ω はコンパクト空間 $2 = \{0, 1\}$ の直積なので Tychonoff の定理よりコンパクトである．$m^{<\omega}$ の形でない有限分岐木の例としては，例えば分岐する数がどんどん増えていく (n 桁目の選び方が n 通りになる) ような木

$$T = \{ \sigma \in \omega^{<\omega} \mid \forall n < \mathrm{lh}(\sigma)[\sigma(n) \leq n] \}$$

などがある．この T はいかなる $m^{<\omega}$ の部分木にもならないが，$[T]$ は依然としてコンパクトである．

各 U_σ が開かつ閉集合であることを思い出すと次がわかる．

系 2.4. 任意の有限分岐木 T に対し，$[T]$ は Stone 空間である．

2.3 小数展開を一般化する

ここまでで定義した用語を用いて，小数展開や p 進展開を一般化することを考えよう．つまり，どんな「小数展開」も最低限これだけは成り立ってしかるべきだ，という条件を公理化したい．

本稿では小数展開の一般化として，次の定義を提案する．

定義 2.5 (位相空間の小数展開). X を US 空間とする．X の小数展開とは，木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ と全射 $x \colon [T] \to X$ の組であって，以下の条件をみたすものである．

(零延長可能性) 任意の $\sigma \in T$ に対し $\sigma^\frown 0 \in T$ が成り立つ．よって特に $\sigma^\frown 000 \cdots \in [T]$ となる．

有限列 $\sigma \in T$ に対しても，零延長可能性を用いて

$$x(\sigma) = x(\sigma^\frown 000 \cdots)$$

と定義し，以後 x を拡張された写像 $T \cup [T] \to X$ と同一視する．

(有限近似性) $[T]$ の任意の点列 $(f_n)_{n \in \omega}$ に対し

$$\lim_{n \to \infty} x(f_n \restriction n) = \lim_{n \to \infty} x(f_n)$$

が成り立つ．ここで等号は「一方が収束するならば他方も収束し，その収束先が等しい」ことを意味する．よって特に定数列 $f_n = f$ について

$$\lim_{n \to \infty} x(f \restriction n) = x(f)$$

が成り立つ．

木 T が (いずれ) 有限分岐木であるとき，小数展開 x を (いずれ) 有限分岐小数展開と呼ぶことにする．

この定義がある程度妥当であることの説明を試みる．まず x が全射であるということは，すなわち X の全ての元が展開可能であるということであるが，これは当然成り立っていてほしい条件である．零延長可能性・有限近似性は，そもそも無限小数が有限小数の極限として定義されていたという事実を反映した条件になっている．有限近似性は感覚的には「遠くの桁での変化が値に与える影響は小さい」ということを意味している．また lim という記号の使用を正当化するには X が US 空間であることが必要である．

有限近似性を仮定することにより，次の非常に有用な事実を導くことができる．

命題 2.6. US 空間 X に対し，X の任意の小数展開 $x\colon [T] \to X$ は連続写像である．

証明. $[T]$ が第一可算であることより，$[T]$ の点列 $(f_n)_{n\in\omega}$ と点 $f \in [T]$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \implies \lim_{n\to\infty} x(f_n) = x(f)$$

を示せばよい．各 U_σ について $f \in U_\sigma \iff \sigma \preccurlyeq f$ であることを思い出すと，$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ は「f のどんな始切片 $\sigma \preccurlyeq f$ に対しても，点列のあるところから先は全て $\sigma \preccurlyeq f_n$ となっている」ということを意味する．言い換えると，任意の n に対して，十分大きな $N(n)$ をとれば全ての $m \geq N(n)$ で $f{\restriction}n = f_m{\restriction}n$ となっている．よって $N(n) \leq M(n)$ をみたす任意の部分列 $(f_{M(n)})_{n\in\omega}$ について

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x(f_{M(n)}) &= \lim_{n\to\infty} x(f_{M(n)}{\restriction}n) && \text{(有限近似性)}\\
&= \lim_{n\to\infty} x(f{\restriction}n) && \text{(上の議論から)}\\
&= x(f) && \text{(有限近似性)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．最後に，仮に $(x(f_n))_{n\in\omega}$ が $x(f)$ に収束しないとすると，$x(f)$ のある開近傍 $U \ni x(f)$ が存在して，無限個の n について $x(f_n) \notin U$ となる．したがって $N(n) \leq M(n)$ なる部分列 $(f_{M(n)})_{n\in\omega}$ であって全ての $n \in \omega$ について $x(f_{M(n)}) \notin U$ であるようなものがあるはずだが，これは上の議論に反する．よって $\lim_{n\to\infty} x(f_n) = \lim_{n\to\infty} x(f_{M(n)}) = x(f)$ となる． □

例 2.7. 1 節で復習した実数の通常の 10 進小数展開や p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の p 進展開はどちらもいずれ有限分岐木小数展開として実現することができる．実際，実数 $x \in \mathbb{R}$ の 10 進小数展開

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\})$$

は $\mathbb{Z}\times 10^{<\omega}$ の元 $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ と同一視することができ，$\mathbb{Z}$ と ω の間の全単射を一つ固定すれば $\omega\times 10^{<\omega}$ の元とみなすことができる．よって実数の通常の 10 進小数展開はいずれ有限分岐木 $T = \{()\}\cup\omega\times 10^{<\omega} \subseteq \omega^{<\omega}$ による小数展開として実現される．この小数展開が零延長可能性，有限近似性をみたすことは明らかであろう．

p 進数 $x \in \mathbb{Q}_p$ の p 進展開

$$x = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n p^n \quad (n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\})$$

についても同様に，$(n_0, a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots) \in \mathbb{Z} \times p^{<\omega}$ を対応させればよい．

3　本論

それではいよいよ本稿の目的であった「一意的な小数展開の存在が空間の完全不連結性を導く」ということを正確に定式化して証明しよう．例 1.1 の自然数展開で見たように，任意の小数展開を許してしまうと完全不連結でなくても一意的な小数展開を持ってしまうことがあるので，木の形状に何らかの制約を課さなければならない．

まず，一意的な有限分岐小数展開を持つ場合から始めよう．例えば Cantor 集合 C や p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ などはこの条件をみたす．

定理 3.1.　X を Hausdorff 空間とする．X 上の一意的な有限分岐小数展開が存在するならば X は完全分離空間であり，よって特に完全不連結である．

証明. X 上の一意的な有限分岐小数展開 $x\colon [T] \to X$ をとる．命題 2.6 より x は連続な全射であり，一意性から単射でもある．T が有限分岐木だから命題 2.3 より $[T]$ はコンパクトであり，また X は Hausdorff だから x は同相写像である．よって $[T]$ が完全分離空間であることから X もそうである．　□

この定理の対偶から，例えば単位閉区間 $[0,1]$ は一意的な有限分岐小数展開を持ち得ないことがわかる．

実数体 $\mathbb{R}$ や p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ など，空間がコンパクトでない場合にはいずれ有限分岐小数展開を考える必要がある．

定理 3.2.　X を (位相空間論における) Baire 空間[*5]であるような位相群であって Hausdorff なものとする．X 上の一意的ないずれ有限分岐小数展開が存在するならば X は完全不連結である．

証明. X 上の一意的ないずれ有限分岐小数展開 $x\colon [T] \to X$ をとる．一意性から x は連続な全単射である．有限列 $\sigma \in T$ に対して，σ と比較可能な元からなる T の部分木を

$$T_\sigma = \{\, \tau \in T \mid \sigma \preccurlyeq \tau \text{ または } \tau \preccurlyeq \sigma \,\}$$

とおく．この表記のもとで $[T]$ の部分集合として $[T_\sigma] = U_\sigma$ が成り立つことに注意する．T がいずれ有限分岐木であることより，ある長さ n が存在して，$\mathrm{lh}(\sigma) = n$ なる任意の $\sigma \in T$ に対して T_σ は有限分岐木となる．すなわち $[T]$ は開基たちの直和として

$$[T] = \bigsqcup_{\substack{\sigma \in T \\ \mathrm{lh}(\sigma) = n}} U_\sigma$$

という形に書け，系 2.4 より各 U_σ は $[T]$ からの相対位相に関して Stone 空間になっている．x が連続な全単射であることより像も

$$X = \bigsqcup_{\substack{\sigma \in T \\ \mathrm{lh}(\sigma) = n}} x(U_\sigma)$$

と直和の形となり，各 U_σ がコンパクトで X が Hausdorff であることから U_σ と $x(U_\sigma)$ は同相なので $x(U_\sigma)$ は X からの相対位相に関して Stone 空間になっている．よって，定理の主張は次の補題 3.3 に帰着される．　□

[*5] Baire の範疇定理が成り立つような空間のこと．

補題 3.3. X を Baire 空間であるような位相群であって Hausdorff なものとする．各自然数 $n \in \omega$ に対し，$C_n \subseteq X$ を相対位相で Stone 空間になっているような部分集合とする．さらに，X が C_n たちの直和として $X = \bigsqcup_{n\in\omega} C_n$ と書けているとする．このとき X は完全不連結である．

以下の証明はろろ (`@ma_ro_ro_ro`) さんに教えていただいた．

証明. X では Baire の範疇定理が成り立つので，少なくとも一つの C_n は内部が空ではない．C_n に含まれる空でない X の開集合 V をとる．V に含まれる C_n の開基 U を一つとる．C_n が Stone 空間であることから U は C_n の開かつ閉集合である．

ここで U が X の開かつ閉集合であることを示す．まず U が C_n の中で開であることから U は X のある開集合 U' と C_n の共通部分として $U = U' \cap C_n$ の形に書けるが，いま $U \subseteq V \subseteq C_n$ だから $U = U' \cap V$ は開集合である．また C_n が Hausdorff 空間 X のコンパクト部分集合であることより C_n は X の閉集合なので U は X の中でも閉集合になっている．以上より U は X の中で開かつ閉である．

U は C_n からの相対位相で完全分離だから連結成分は 1 点である．このことと U が X の開かつ閉集合であることを合わせると U 内の点は全て X の連結成分になっていることがわかる．1 点 $u \in U$ を固定し，任意の点 $x \in X$ をとる．X は位相群だから U を xu^{-1} で平行移動した $xu^{-1}U \subseteq X$ は U と同相で x を含む．よって x を含む連結成分は 1 点集合 $\{x\}$ となる． □

この定理の対偶から，数直線 $\mathbb{R}$ は一意的ないずれ有限分岐小数展開を持ち得ないことがわかる．

付録 A　位相空間論におけるいくつかの定義

ここでは本編で用いられている位相空間的な概念のうち，いわゆる「集合と位相」の教科書に載っていないようなものについてその定義を述べる．

定義. X を位相空間とする．

- X が **US 空間** (US-space) であるとは，X 内の任意の収束点列の収束先がただ一つであることをいう．
- X が**完全分離空間** (totally separated space) であるとは，相異なる任意の 2 点 $x, y \in X$ に対してある開かつ閉集合 $U \subseteq X$ が存在して $x \in U \not\ni y$ となることをいう．
- X が **Stone 空間** (Stone space) であるとは，X がコンパクト Hausdorff 空間であって開かつ閉集合からなる開基を持つことをいう．
- X が (位相空間論における) **Baire 空間** (Baire space) であるとは，X において Baire の範疇定理が成り立つこと，すなわち閉集合の可算和が X 全体となるとき，少なくとも一つの閉集合は内部が空でないことをいう．

例.

- 任意の Hausdorff 空間は US 空間である．
- 任意の完全分離空間は完全不連結である．
- 任意の完全不連結コンパクト Hausdorff 空間は Stone 空間である．
- 完備距離空間や局所コンパクト Hausdorff 空間は Baire 空間である．

参考文献

[1] 志賀浩二, 集合への 30 講, 朝倉書店, 1988.
[2] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980.
[3] 雪江明彦, 整数論 1 初等整数論から p 進数へ, 日本評論社, 2013.

変更履歴

2019/07/09　公開
2019/07/09　微修正