半群の語の問題
Word Problem for Semigroups

y.*

2019 年 5 月 1 日

最終更新日: 2019 年 5 月 1 日

概要

半群とは，結合律を満たすような二項演算を備えた代数系のクラスである．半群の語の問題とは，与えられた 2 つの文字列が与えられた有限表示半群において同じ元を表すかどうかを判定する決定問題である．本稿では，半群の語の問題が決定不能となるような有限表示半群が存在することを示す．さらに，そのような具体的な半群として，5 つの生成元と 7 つの関係式からなる有限表示半群 (Tseitin 半群) がとれることを示す．

Keywords: 半群 (semigroup), 語の問題 (word problem), 半群の有限表示 (finite presentation of semigroups), Tseitin 半群 (Tseitin semigroup).

1 半群の語の問題

本節では，有限表示半群を定義し，有限表示半群の語の問題が決定不能であることを示す．

定義 1.1 (半群). 集合 S とその上の二項演算 $\circ\colon S \times S \to S$ の組 $(S, \circ)$ が**半群** (semigroup) であるとは，演算 $\circ$ が次の**結合律** (associative law) を満たすときをいう．

$$\forall x, y, z \in S[(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)].$$

例 1.2. 全ての群は半群である．任意の集合 S と $x, y \in S$ に対し，$x \circ y := x$ と定めると $\circ$ は結合律を満たすので $(S, \circ)$ は半群になる．アルファベット Σ 上の文字列全体の集合 Σ^* は，文字列の連結を演算とする半群をなす．同様に，Σ 上の空でない文字列の全体 $\Sigma^+ := \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ も同じ演算で半群をなす．

定義 1.3 (半群の表示). Σ を任意の集合とし，$\mathcal{R} \subseteq \Sigma^+ \times \Sigma^+$ を語の組の集合とする．Σ^+ 上の二項関係 E を次のように定める．

$$w \mathrel{E} w' \iff \exists x, y \in \Sigma^* \, \exists u, v \in \Sigma^+[w = xuy, w' = xvy, (u, v) \in \mathcal{R}].$$

このとき，Σ^+ 上の同値関係 $\sim$ を，E を含む最小の同値関係 (すなわち，E の反射推移対称閉包) として定義する．[*1] このとき，語の連結は $\Sigma^+/{\sim}$ において well-defined な二項演算になり，$\Sigma^+/{\sim}$ は半群をなす．この半

---

[*] `http://iso.2022.jp/`

[*1] 言い換えると，$\mathcal{R}$ を半 Thue 系とみなし，これを対称化して得られる Thue 系 $\mathcal{R}_{\mathrm{sym}}$ の到達可能性関係 $\xrightarrow[\mathcal{R}_{\mathrm{sym}}]{*}$ を考えているわけである．

群を $\langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ と書く．$\Sigma, \mathcal{R}$ がともに有限集合であるとき，$\langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ は有限表示半群であるという．関係式がひとつもない有限表示半群 $\langle a_1, \ldots, a_r \mid \quad \rangle \cong \{a_1, \ldots, a_r\}^+$ を階数 r の自由半群という．

例 1.4. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^3 = b^2 \rangle$ とおく．S は 2 以上の整数全体 $T = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2 \}$ と通常の加法のなす半群 $(T, +)$ と同型である．実際，$a \mapsto 2, b \mapsto 3$ という対応が S から T への同型写像を与える．

本稿では以下の決定問題を扱う．

問題 1.5 (半群の語の問題 (word problem for semigroups)).
Input: 有限表示半群 $S = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ と語 $w_1, w_2 \in \Sigma^+$
Question: S において $w_1 \sim w_2$ か？

問題 1.6 (半群 S における語の問題 (word problem for S)). 有限表示半群 $S = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ を固定する．
Input: 2 つの語 $w_1, w_2 \in \Sigma^+$
Question: S において $w_1 \sim w_2$ か？

定理 1.7 (Markov and Post, 1947). 半群の語の問題 1.5 は決定不能である．また，半群 S における語の問題 1.6 が決定不能になるような有限表示半群 S が存在する．

証明. 半群の語の問題は定義から明らかに Thue 系の到達可能性問題と等価である．よって半群の語の問題は決定不能である．また，半 Thue 系の個別到達可能性問題が決定不能となるような Thue 系 $\mathcal{R}$ をとれば，半群 $S = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ における語の問題は決定不能である．Thue 系については「半 Thue 系」[1] を参照のこと． □

Thue 系の到達可能性問題の代わりに，レジスター機械の停止問題を用いた直接証明が新井 [2, 6 章] にある．

2 Tseitin 半群

定義 2.1. **Tseitin 半群** (Tseitin semigroup) とは，以下の表示によって定義される半群 Π のことである：[*2]

$$\Pi := \langle a, b, c, d, e \mid ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, eca = ce, edb = de, cca = ccae \rangle.$$

定理 2.2 (Tseitin [3], 1958). Tseitin 半群 Π の語の問題は決定不能である．

証明. Adian and Durnev [4] を見よ □

参考文献

[1] y., 半 Thue 系 (2018),
http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/semi-thue-system.pdf.

[2] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[3] G. S. Tseitin, An associative calculus with an insoluble problem of equivalence, *Trudy Mat. Inst. Steklov* **52** (1958) 172–189 (in Russian), http://mi.mathnet.ru/eng/tm1317.

[4] S. I. Adian, V. G. Durnev, Decision problems for groups and semigroups, *Russ. Math. Surv.* **55** no. 2 (2000) 207–296, https://doi.org/10.1070/RM2000v055n02ABEH000267.

[*2] Tzeitin, Ceitin, Cejtin など，転写の仕方は文献によって様々である．キリル文字では Цейтин と書く． Π はツェーと読む．

変更履歴

2019/05/01　公開