正弦関数を含む式の求根問題
Root-Finding Problem for Expressions with the Sine Function

y.[*]

2019 年 1 月 2 日

最終更新日: 2019 年 1 月 3 日

概要

Tarski による実閉体の量化記号消去のアルゴリズムにより，実数体 $\mathbb{R}$ の 1 階理論 $\mathrm{Th}(\mathbb{R}; 0, 1, +, \times, <)$ は決定可能であることが知られている．本稿では，Hilbert の第 10 問題の決定不能性を利用して，言語に正弦関数 sin を加えた $\mathbb{R}$ の 1 階理論 $\mathrm{Th}(\mathbb{R}; 0, 1, +, \times, <, \sin)$ が決定不能になることを証明する．さらに，使用可能な変数の個数を 1 つに制限しても決定不能であることも示す．

Keywords: existential theory of the reals, L 項 (L-term).

1　定義と背景

問題を正確に定義するために，数理論理学におけるいくつかの定義を導入する．ここでの定義が後の証明で本質的に必要になるというわけではないので，興味のない読者は例 1.2 まで読み飛ばしてほしい．

定義 1.1 (言語，項，論理式，構造).　**言語** (language) L とは，定数記号 c_i，関数記号 f_j，関係記号 R_k のいくつかの集まり $\{\, c_i \mid i \in I \,\} \cup \{\, f_j \mid j \in J \,\} \cup \{\, R_k \mid k \in K \,\}$ のことをいう．各関数記号 f_j，関係記号 R_k には**アリティ** (arity) と呼ばれる正整数が定まっている．f_j のアリティが n のとき f_j を n 項関数と呼び，R_k のアリティが n のとき R_k を n 項関係と呼ぶ．

L を言語とする．L **項** (L-term) とは，次のように帰納的に定義される概念である．

1. 任意の定数記号 $c \in L$ は L 項である．
2. 任意の変数記号 x は L 項である．
3. L 項 $t_1, \ldots, t_n$ と n 項関数記号 $f \in L$ に対し，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L 項である．
4. 以上のように構成されるものだけが L 項である．

L **論理式** (L-formula) とは，次のように帰納的に定義される概念である．

1. L 項 t_1, t_2 に対し，$t_1 = t_2$ は L 論理式である．
2. L 項 $t_1, \ldots, t_n$ と n 項関係記号 $R \in L$ に対し，$R(t_1, \ldots, t_n)$ は L 論理式である．
3. L 論理式 φ, ψ と変数記号 x に対し，$\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi, \neg\varphi, \forall x\varphi, \exists x\varphi$ も L 論理式である．
4. 以上のように構成されるものだけが L 論理式である．

---

[*] `http://iso.2022.jp/`

上で 1，2 だけで構成される L 論理式を**原子論理式** (atomic formula) という．自由変数 ($\forall$ や $\exists$ で指定されていない変数) を持たない L 論理式を **L 文** (L-sentence) という．原子論理式に存在量化記号 $\exists x$ をいくつかつけて得られる文を**存在文** (existential sentence) という．

$L = \{ c_i \mid i \in I \} \cup \{ f_j \mid j \in J \} \cup \{ R_k \mid k \in K \}$ を言語とする．このとき L **構造** (L-structure) $\mathcal{M} = (M; c_i^{\mathcal{M}}, f_j^{\mathcal{M}}, R_k^{\mathcal{M}})$ とは，集合 M と，L の各記号の M における解釈

- $c_i^{\mathcal{M}} \in M$,
- $f_j^{\mathcal{M}}\colon M^n \to M$ (n は f_j のアリティ),
- $R_k^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ (n は R_k のアリティ)

の組のことをいう．

L 文 φ と L 構造 $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ で φ が成り立つことを

$$\mathcal{M} \models \varphi$$

で表す．$\mathcal{M}$ の full theory, existential theory をそれぞれ

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{ \varphi\colon L \text{ 文} \mid \mathcal{M} \models \varphi \},$$
$$\mathrm{Th}_{\exists}(\mathcal{M}) := \{ \varphi\colon L \text{ 文かつ存在文} \mid \mathcal{M} \models \varphi \}$$

とおく．

例 1.2. $L_{\mathrm{ORing}} = \{0, 1, -, +, \times, <\}$ とおく．ここで $0, 1$ は定数記号，$-$ は 1 項関数記号，$+, \times$ は 2 項関数記号，$<$ は 2 項関係記号である．L_{ORing} を順序環の言語という．$\mathcal{R} = (\mathbb{R}; 0, 1, -, +, \times, <)$ を L_{ORing} 構造とする．ここで各記号の解釈は，$\mathbb{R}$ の通常の零元，単位元，加法，乗法，順序と定める．同様に，$\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}; 0, 1, -, +, \times, <)$ を L_{ORing} 構造とする．このとき，L_{ORing} 文 $\exists x[x \times x = 1 + 1]$ を考えると，これは存在文であり，

$$\mathcal{R} \models \exists x[x \times x = 1 + 1], \qquad \mathcal{Q} \not\models \exists x[x \times x = 1 + 1]$$

が成り立つ．以降は $\mathcal{R}$ や $\mathcal{Q}$ はそれぞれ単に $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ と書く．また，$x \times x$ や $1 + 1$ は省略してそれぞれ $x^2, 2$ などと書く．

$L_{\sin} = L_{\mathrm{ORing}} \cup \{\sin\}$ とおく．ここで sin は 1 項関数記号である．sin を通常の正弦関数と解釈することにより，$L_{\sin}$ 構造 $\mathbb{R}_{\sin} = (\mathbb{R}; 0, 1, -, +, \times, <, \sin)$ が定まる．

実は，Tarski による**実閉体** (real closed field) の**量化記号消去** (quantifier elimination) のアルゴリズムにより，実数体の 1 階理論 $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ は決定可能であることが知られている．

問題 1.3 (実数体の 1 階理論 (first-order theory of the reals)).
Input: L_{ORing} 文 φ
Question: $\mathbb{R} \models \varphi$ か？

定理 1.4 (Tarski [1], 1951). 実閉体の 1 階理論 $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ は決定可能である．

証明については穴井・横山 [2] などの教科書も参照のこと．

2　多変数の場合

実は，言語に sin を加えると実数の 1 階理論 $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\sin})$ が決定不能になることが証明できる．

問題 2.1 (正弦関数を含む式の求根問題 (root-finding problem for expressions with the sine function)).

Input: $L_{\sin}$ 項 $t(x_1, \ldots, x_n)$

Question: $\exists x_1 \in \mathbb{R} \cdots \exists x_n \in \mathbb{R}[t(x_1, \ldots, x_n) = 0]$ か？

定理 2.2 (cf. Richardson [3], Wang [4], [5, Section 9.2]). $\mathbb{R}_{\sin}$ の existential theory $\mathrm{Th}_{\exists}(\mathbb{R}_{\sin})$ は決定不能である．より強く，問題 2.1 は決定不能である．

証明. 仮に決定可能であったとすると，自然数に関する Hilbert の第 10 問題 $\mathrm{HTP}(\mathbb{N})$ が決定可能になってしまうことを示す．$\mathrm{HTP}(\mathbb{N})$ の決定不能性の証明については「Hilbert の第 10 問題」[6] を参照のこと．

整数係数多項式 $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ を任意にとり，次のような存在文を考える:

$$\exists\chi_1 \cdots \exists\chi_m \exists\psi\exists\omega[f(\chi_1^2, \ldots, \chi_m^2)^2 + (7\psi^2 + \omega^2 - 1)^2 + \sin^2(3 + \psi^2) \\ + \sin^2((3 + \psi^2)\chi_1^2) + \cdots + \sin^2((3 + \psi^2)\chi_m^2) = 0]. \quad (1)$$

このとき，

$$\exists(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m[f(x_1, \ldots, x_m) = 0] \iff \mathbb{R} \models (1)$$

となることを示す．

($\Longrightarrow$)　$f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ の自然数解 $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m$ をとる．このとき，

$$\chi_1 := \sqrt{x_1}, \qquad \ldots, \qquad \chi_m := \sqrt{x_m}, \qquad \psi := \sqrt{\pi - 3}, \qquad \omega := \sqrt{22 - 7\pi}$$

とおけば (1) が成り立つことがわかる．

($\Longleftarrow$)　(1) が成り立つと仮定すると，次の連立方程式

$$\begin{cases} f(\chi_1^2, \ldots, \chi_m^2) = 0, & \text{(2a)} \\ 7\psi^2 + \omega^2 - 1 = 0, & \text{(2b)} \\ \sin(3 + \psi^2) = 0, & \text{(2c)} \\ \sin((3 + \psi^2)\chi_1^2) = \cdots = \sin((3 + \psi^2)\chi_m^2) = 0 & \text{(2d)} \end{cases}$$

の解 $(\chi_1, \ldots, \chi_m, \psi, \omega) \in \mathbb{R}^{m+2}$ が存在する．このとき (2c) よりある自然数 $k \geq 1$ によって $3 + \psi^2 = k\pi$ の形に書ける．一方，(2b) より $\psi^2 \leq \psi^2 + \omega^2/7 = 1/7$ だから $3 + \psi^2 = \pi$ でなければならない．よって (2d) より $(\chi_1^2, \ldots, \chi_m^2) \in \mathbb{N}^m$ となり，これが (2a) の自然数解を与えている．　□

3　1 変数の場合

$L_{\sin}$ 項について，出現する変数の個数を 1 つに制限しても決定不能であることを示す．

問題 3.1 (正弦関数を含む 1 変数の式の求根問題 (root-finding problem for unary expressions with the sine function).

Input: x 以外の変数を含まない $L_{\sin}$ 項 $t(x)$
Question: $\exists x \in \mathbb{R}[t(x)=0]$ か？

定理 3.2 (Laczkovich [7], 2003 (cf. Wang [4])). 問題 3.1 は決定不能である．

証明. 所属判定問題が決定不能になるような c.e. 集合 $H_0 \subseteq \mathbb{N}$ をとる．MRDP 定理より，ある整数係数多項式 $P_0(y, x_1, \ldots, x_m)$ が存在して

$$H_0 = \{\, y \in \mathbb{N} \mid \exists (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m [P_0(y, x_1, \ldots, x_m) = 0]\,\}$$

となる．Lagrange の四平方和定理より，$n := 4m, P(y, x_1, \ldots, x_m) := P_0(y, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \ldots, x_{m-3}^2 + x_{m-2}^2 + x_{m-1}^2 + x_m^2)$ とおき，さらに

$$H := \{\, y \in \mathbb{Z} \mid \exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n [P(y, x_1, \ldots, x_n) = 0]\,\}$$

とおけば $H \cap \mathbb{N} = H_0$ だから，H の所属判定問題も (入力の範囲が広くなったので) 決定不能である．

$P(y, x_1, \ldots, x_n)$ の変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する斉次化を $Q(y, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ とする．このとき $Q(y, 1, x_1, \ldots, x_n) = P(y, x_1, \ldots, x_n)$ となっている．Q の $x_0, x_1, \ldots, x_n$ に関する総次数を d とおく．自然数 N を

$$(\pi - 3)^N < \frac{1}{2(n+1)}$$

が成り立つ程度に十分大きくとり，

$$\begin{aligned} S(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) &:= Q(y, x_0, x_1, \ldots, x_n)^2 + (x_0 - 3)^{2N}, \\ h_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) &:= \frac{\partial S}{\partial x_i}(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

とおく．

主張 3.3. 各 $i = 0, 1, \ldots, n$ に対し，ある整数係数多項式 $g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[y, x_0, \ldots, x_n]$ が存在して次を満たす．

1. 任意の $(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$ に対して $g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq 1$,
2. 任意の $(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$ と任意の $(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in [-2, 2]^{n+1}$ に対して

$$|h_i(y, x_0 + t_0, x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n)| \leq g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

主張の証明. 単項式の和に展開して $h_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} c y^\alpha x_0^{\beta_0} x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ (ただしここで $c = c_{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} \in \mathbb{Z}$) とする．このとき

$$g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) := 1 + \sum_{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} |c|\, (y^2+1)^\alpha (x_0^2+3)^{\beta_0} (x_1^2+3)^{\beta_1} \cdots (x_n^2+3)^{\beta_n}$$

とおくと，明らかに $g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq 1$ で，さらに

$$\begin{aligned}
&|h_i(y, x_0 + t_0, x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n)| \\
&\leq \sum_{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} |c| \cdot |y|^\alpha \, |x_0 + t_0|^{\beta_0} \, |x_1 + t_1|^{\beta_1} \cdots |x_n + t_n|^{\beta_n} \\
&\leq \sum_{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} |c| \, (y^2 + 1)^\alpha (|x_0| + |t_0|)^{\beta_0} (|x_1| + |t_1|)^{\beta_1} \cdots (|x_n| + |t_n|)^{\beta_n} \\
&\leq \sum_{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} |c| \, (y^2 + 1)^\alpha (x_0^2 + 1 + 2)^{\beta_0} (x_1^2 + 1 + 2)^{\beta_1} \cdots (x_n^2 + 1 + 2)^{\beta_n} \\
&< 1 + \sum_{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} |c| \, (y^2 + 1)^\alpha (x_0^2 + 3)^{\beta_0} (x_1^2 + 3)^{\beta_1} \cdots (x_n^2 + 3)^{\beta_n} \\
&= g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

となる． □

$\sin x_i$ を含む関数 F を

$$F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) := 4(n+1)^2 \left(S(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=0}^{n} g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \sin^2 x_i \right)$$

と定める．

主張 3.4. 集合 $H_{F<1}, H_{F\leq 1}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
H_{F<1} &:= \{\, y \in \mathbb{Z} \mid \exists (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} [F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) < 1] \,\}, \\
H_{F\leq 1} &:= \{\, y \in \mathbb{Z} \mid \exists (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} [F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \leq 1] \,\}
\end{aligned}$$

と定めると，$H_{F<1} = H_{F\leq 1} = H$ となる．

主張の証明. $H_{F<1} \subseteq H_{F\leq 1}$ は明らか．$H \subseteq H_{F<1}$ を示す．任意に $y \in H$ をとる．このときある $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ が存在して $P(y, k_1, \ldots, k_n) = 0$ が成り立つ．ここで

$$x_0 := \pi, \qquad x_1 := \pi k_1, \qquad \ldots, \qquad x_n := \pi k_n$$

とおくと

$$\begin{aligned}
F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) &= 4(n+1)^2 \left(Q(y, \pi, \pi k_1, \ldots, \pi k_n)^2 + (\pi - 3)^{2N} + \sum_{i=0}^{n} g_i(y, \pi, \pi k_1, \ldots, \pi k_n)^2 \cdot 0 \right) \\
&= 4(n+1)^2 \pi^{2d} Q(y, 1, k_1, \ldots, k_n)^2 + 4(n+1)^2 (\pi - 3)^{2N} \\
&= 4(n+1)^2 \pi^{2d} P(y, k_1, \ldots, k_n)^2 + (2(n+1)(\pi - 3)^N)^2 \\
&< 0 + 1^2 = 1
\end{aligned}$$

となるので $y \in H_{F<1}$ となる．

次に，$H_{F\leq 1} \subseteq H$ を示す．任意に $y \in H_{F\leq 1}$ をとる．このとき，ある $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して $F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \leq 1$ が成り立つ．各 $i = 0, 1, \ldots, n$ に対し，$|\pi k_i - x_i| \leq \pi/2$ となるような整数 $k_i \in \mathbb{Z}$ がとれる．任意の $X \in [0, \pi/2]$ に対し，$X/2 \leq 2X/\pi \leq \sin X$ が成り立つので，$X = |\pi k_i - x_i|$ とおけば

$$\frac{1}{2} |\pi k_i - x_i| \leq \sin |\pi k_i - x_i| = \sin |x_i| = |\sin x_i| \tag{3}$$

となる．よって，各 $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned}
1 &\geq F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \\
&\geq 4(n+1)^2 \sum_{i=0}^{n} g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n)^2 \sin^2 x_i \\
&\geq 4(n+1)^2 g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n)^2 \sin^2 x_i
\end{aligned}$$

だから，両辺の平方根をとると

$$1 \geq 2(n+1) \left| g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \right| \cdot \left| \sin x_i \right|$$

となり，よって

$$\left| g_i(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \right| \cdot \left| \sin x_i \right| \leq \frac{1}{2(n+1)} \tag{4}$$

が成り立つ．関数 $\tilde{S} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$\tilde{S}(s) := S(y, (1-s)x_0 + s\pi k_0, (1-s)x_1 + s\pi k_1, \ldots, (1-s)x_n + s\pi k_n)$$

とおくと，平均値の定理からある定数 $c \in [0,1]$ が存在して

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(1) - \tilde{S}(0) &= \frac{d\tilde{S}}{ds}(c) \cdot (1-0) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}(y, (1-s)x_0 + s\pi k_0, \ldots, (1-s)x_n + s\pi k_n)\bigg|_{s=c} \cdot \frac{d}{ds}((1-s)x_i + s\pi k_i)\bigg|_{s=c} \\
&= \sum_{i=0}^{n} h_i(y, (1-c)x_0 + c\pi k_0, \ldots, (1-c)x_n + c\pi k_n) \cdot (-x_i + \pi k_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} h_i(y, x_0 + c(\pi k_0 - x_0), \ldots, x_n + c(\pi k_n - x_n)) \cdot (\pi k_i - x_i)
\end{aligned}$$

となる．$c_i := c(\pi k_i - x_i)$ とおくと，式 (3) より $c_i \in [-\pi/2, \pi/2] \subseteq [-2, 2]$ である．さらに主張 3.3，式 (4) と合わせると

$$\begin{aligned}
\left| S(y, \pi k_0, \pi k_1, \ldots, \pi k_n) - S(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n} h_i(y, x_0 + c_0, \ldots, x_n + c_n) \cdot (\pi k_i - x_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \left| h_i(y, x_0 + c_0, \ldots, x_n + c_n) \right| \cdot \left| (\pi k_i - x_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} g_i(y, x_0, \ldots, x_n) \cdot 2 \left| \sin x_i \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{2(n+1)} \leq 1
\end{aligned}$$

を得る．よって $1 \geq F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq 4(n+1)^2 S(y, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ と合わせて

$$\begin{aligned}
\left| S(y, \pi k_0, \pi k_1, \ldots, \pi k_n) \right| &\leq \left| S(y, \pi k_0, \pi k_1, \ldots, \pi k_n) - S(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \right| + \left| S(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \right| \\
&\leq 1 + \frac{1}{4(n+1)^2} < 2
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}(\pi k_0 - 3)^{2N} &\leq Q(y, \pi k_0, \pi k_1, \ldots, \pi k_n)^2 + (\pi k_0 - 3)^{2N} \\ &\leq S(y, \pi k_0, \pi k_1, \ldots, \pi k_n) < 2\end{aligned}$$

となるが，$k_0 \in \mathbb{Z}$ だったから $k_0 = 1$ でなければならない．以上より

$$\pi^{2d} P(y, k_1, \ldots, k_n)^2 = \pi^{2d} Q(y, 1, k_1, \ldots, k_n)^2 = Q(y, \pi k_0, \pi k_1, \ldots, \pi k_n)^2 < 2$$

となるが，$P(y, k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}$ だから $P(y, k_1, \ldots, k_n) = 0$ でなければならない．よって $y \in H$ となる． □

次に，関数 $t \mapsto (t \sin t^2, t \sin t^4, \ldots, t \sin t^{2n})$ の $\mathbb{R}^n$ における像が稠密であることを示す．

主張 3.5. 任意の $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \delta > 0, K > 0$ に対し，ある $t > K$ が存在して，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し

$$\left| x_i - t \sin t^{2i} \right| < \delta$$

となる．

証明. n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは，$\limsup_{t \to \infty} t \sin t^2 = \infty, \liminf_{t \to \infty} t \sin t^2 = -\infty$ と中間値の定理からわかる．

$n \geq 2$ とする．$0 < \delta < 1, K > 1$ であるとしてよい．$\delta' := \delta/2$ と $K' := K + 2^{2n+1}\pi/\delta + |x_n|$ に対して帰納法の仮定を用いると，ある $u > K'$ が存在して，各 $i = 1, \ldots, n-1$ に対して

$$\left| x_i - u \sin u^{2i} \right| < \delta' = \delta/2$$

が成り立つ．ここで

$$v := u + \frac{\delta}{8n(u+1)^{2n-2}}$$

とおくと $u \leq v \leq u + 1$ であり，任意の $t \in [u, v]$ と $i = 1, \ldots, n-1$ に対して

$$\begin{aligned}\left| t \sin t^{2i} - u \sin u^{2i} \right| &\leq \left| t \sin t^{2i} - t \sin u^{2i} + t \sin u^{2i} - u \sin u^{2i} \right| \\ &\leq \left| t(\sin t^{2i} - \sin u^{2i}) \right| + |t - u| \left| \sin u^{2i} \right|\end{aligned}$$

中間値の定理よりある $c \in [u, t]$ が存在して $\left| \sin t^{2i} - \sin u^{2i} \right| \leq |\cos c| \cdot \left| t^{2i} - u^{2i} \right| \leq t^{2i} - u^{2i}$ となるので

$$\begin{aligned}&\leq t(t^{2i} - u^{2i}) + (v - u) \cdot 1 \\ &\leq (u+1)(v^{2i} - u^{2i}) + \frac{\delta}{8n(u+1)^{2n-2}} \\ &\leq (u+1)(v^{2i-1} + v^{2i-2}u + \cdots + u^{2i-1})(v - u) + \frac{\delta}{8} \\ &\leq (u+1)2i(u+1)^{2i-1} \frac{\delta}{8n(u+1)^{2n-2}} + \frac{\delta}{8} \\ &\leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{8} < \frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\left| x_i - t \sin t^{2i} \right| \leq \left| x_i - u \sin u^{2i} \right| + \left| u \sin u^{2i} - t \sin t^{2i} \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

を得る．ここで $u > K' > |x_n|$ であることと

$$\begin{aligned} v^{2n} = \left(u + \frac{\delta}{8n(u+1)^{2n-2}}\right)^{2n} &\geq u^{2n} + 2n \cdot u^{2n-1} \cdot \frac{\delta}{8n(u+1)^{2n-2}} \\ &> u^{2n} + \frac{\delta}{4} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(u+1)^{2n-2}} \\ &> u^{2n} + \frac{\delta}{4} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2u)^{2n-2}} \\ &= u^{2n} + \frac{\delta}{4} \cdot \frac{u}{2^{2n-2}} \\ &> u^{2n} + \frac{\delta}{4} \cdot \frac{2^{2n+1}\pi/\delta}{2^{2n-2}} \\ &= u^{2n} + 2\pi \end{aligned}$$

を合わせると，$t \sin t^{2n} = x_n$ となる $t \in [u, v]$ がとれることがわかる． □

ここで

$$\begin{aligned} f(y, x) &:= 1 - F(y, x \sin x^2, x \sin x^4, \ldots, x \sin x^{2n+2}), \\ H_{f>0} &:= \{\, y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{R}[f(y, x) > 0] \,\}, \\ H_{f=0} &:= \{\, y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{R}[f(y, x) = 0] \,\} \end{aligned}$$

とおき，$H_{f>0} = H_{f=0} = H$ であることを示す．

($H_{f>0} \subseteq H$)　明らかに $H_{f>0} \subseteq H_{F<1}$ であり，主張 3.4 から $H_{F<1} = H$ なのでよい．

($H \subseteq H_{f>0}$)　主張 3.4 より，$H_{F<1} \subseteq H_{f>0}$ を示せば十分である．任意に $y \in H_{F<1}$ をとると，ある $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ が存在して $F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) < 1$ となる．このとき，F の連続性からある $\delta > 0$ が存在して，$|x_0 - z_0| + |x_1 - z_1| + \cdots + |x_n - z_n| < \delta$ を満たす任意の $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して $1 - F(y, z_0, z_1, \ldots, z_n) > 0$ が成り立つ．よって $\delta/(n+1)$ に対して主張 3.5 を適用すれば，ある $t \in \mathbb{R}$ が存在して各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対し $\left|x_{i-1} - t \sin t^{2i}\right| < \delta/(n+1)$ が成り立つので，$f(y, t) > 0$ を得る．

($H_{f=0} \subseteq H$)　明らかに $H_{f=0} \subseteq H_{F\leq 1}$ であり，主張 3.4 から $H_{F\leq 1} = H$ だからよい．

($H_{f>0} \subseteq H_{f=0}$)　任意に $y \in H_{f>0}$ をとると，ある $u \in \mathbb{R}$ が存在して $f(y, u) > 0$ となる．F の定義より任意の $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し $F(y, x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq (x_0 - 3)^{2N}$ だから，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(y, x) \leq 1 - (x \sin x^2 - 3)^{2N}$$

が成り立つ．特に $x = 0$ のとき $f(y, 0) \leq 1 - 9^N < 0$ となる．よって，中間値の定理より $f(y, x) = 0$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在する．

以上より，H の所属判定問題が決定不能であることより $H_{f=0}$ の所属判定問題も決定不能になる．すなわち，与えられた $y \in \mathbb{Z}$ に対し，$f(y, x) = 0$ となる $x \in \mathbb{R}$ が存在するかどうかは決定不能である． □

注意 3.6.　上の証明から $H_{f>0}$ の所属判定問題も決定不能なので，与えられた 1 変数の $L_{\sin}$ 項 $t(x)$ が常に負の値をとるかどうか (同様に，常に正の値をとるかどうか) という問題も決定不能であることがわかる．

参考文献

[1] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*: Prepared for Publication with the Assistance of J.C.C. McKinsey, Santa Monica, Calif.: RAND Corporation, R-109, 1951, `https://www.rand.org/pubs/reports/R109.html`.

[2] 穴井宏和・横山和弘, QE の計算アルゴリズムとその応用 数式処理による最適化, 東京大学出版会, 2011.

[3] D. Richardson, Some undecidable problems involving elementary functions of a real variable, *J. Symbolic Logic* **33** (1968) 514–520, `https://doi.org/10.2307/2271358`.

[4] P. S. Wang, The undecidability of the existence of zeros of real elementary functions, *J. Assoc. Comput. Mach.* **21** (1974) 586–589, `https://doi.org/10.1145/321850.321856`.

[5] Y. Matiyasevich, *Hilbert's Tenth Problem*, MIT Press, 1993.

[6] y., Hilbert の第 10 問題 (2018),
`http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/hilberts-tenth-problem.pdf`.

[7] M. Laczkovich, The removal of π from some undecidable problems involving elementary functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** no. 7 (2003) 2235–2240,
`https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06753-9`.

変更履歴

2019/01/02　公開
2019/01/03　参考文献 [3] のタイトルの抜けを修正