

Fraction Game と一般化 Collatz 問題

Fraction Game and Generalized Collatz Problem

y.*

2018 年 7 月 4 日

最終更新日: 2018 年 7 月 4 日

概要

Collatz 予想 (または角谷予想, $3x + 1$ 問題などとも呼ばれる) とは, 「偶数なら 2 で割り, 奇数なら 3 倍して 1 を足す」という操作を繰り返すと, どんな正の整数から始めてもいずれ 1 に辿り着くという予想である. この予想そのものは未解決であるが, 実はこれを拡張した一般化 Collatz 問題という決定問題は決定不能であることが知られている. 本稿ではまず vector game, fraction game という決定問題が決定不能であることを証明し, それを利用して一般化 Collatz 問題の決定不能性を導く.

Keywords: Collatz 予想 (Collatz conjecture), 一般化 Collatz 問題 (generalized Collatz problem), vector game, fraction game, rational game, Fractran.

本稿では \mathbb{N} は非負整数の全体の集合を表すものとする. よって特に $0 \in \mathbb{N}$ である.

1 Fraction Game

本節の証明では Minsky 機械が Turing 完全であることを用いる. Minsky 機械の定義は「カウンター機械 (レジスター機械)」[1] を参照のこと.

問題 1.1 (vector game).

Input: 非負整数 $d, n \in \mathbb{N}$ と有限個の d 次元ベクトルのリスト $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^d$

Question: $v = (n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ に対し,

$$v + v_i \in \mathbb{N}^d \text{ を満たすような最初の } v_i \text{ を } v \text{ に加算する}^{*1} \quad (*)$$

という操作を無限に繰り返すことはできるか?

例 1.2. $d = 2, n = 7, v_1 = (-4, 1), v_2 = (-2, 0), v_3 = (3, -1)$ とおく. $v = (n, 0) = (7, 0)$ から開始する. 初めに, $v + v_1 = (7, 0) + (-4, 1) = (3, 1) \in \mathbb{N}^2$ なので $v = (3, 1)$ である. 次に, $v + v_1 = (3, 1) + (-4, 1) = (-1, 2) \notin \mathbb{N}^2$ だが, $v + v_2 = (3, 1) + (-2, 0) = (1, 1) \in \mathbb{N}^2$ なので $v = (1, 1)$ である. 以下同様に繰り返すと

$$(7, 0) \xrightarrow{+v_1} (3, 1) \xrightarrow{+v_2} (1, 1) \xrightarrow{+v_3} (4, 0) \xrightarrow{+v_1} (0, 1) \xrightarrow{+v_3} (3, 0) \xrightarrow{+v_2} (1, 0)$$

となり, これ以上操作 (*) を適用することはできないので停止する.

* <http://iso.2022.jp/>

*1 $i_0 := \min\{i \mid v + v_i \in \mathbb{N}^d\}$ とおき, v に v_{i_0} を加えるという意味.

一方, $d = 2, n = 3, v_1 = (1, 2)$ とおけば, 当然

$$(3, 0) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (5, 4) \rightarrow \dots$$

と無限に続く.

定理 1.3 (Conway [3], 1972). vector game は決定不能である.

証明. vector game で Minsky 機械の入力が 1 変数の任意のプログラムをシミュレートできることを示す. Minsky 機械のプログラム P をとる. P は以下の条件を満たすとしてよい.

- 入力は \mathcal{R}_0 に入り, プログラム終了時の \mathcal{R}_1 の内容 r_1 を出力値とする (カウンター機械の定義における \mathcal{R}_0 と \mathcal{R}_1 の役割を入れ換える).
- プログラムは 1 行目から実行が開始され, 0 行目に到達した時点で計算を終了する.
- 自分自身にジャンプする行はない. つまり, l 行目に $\text{inc } \mathcal{R}_i, (m)$ と書かれていたら $l \neq m$ であり, l 行目に $\text{jnzdec } \mathcal{R}_i, (m), (n)$ と書かれていたら $l \neq m \neq n \neq l$ である.
- P は停止するとき \mathcal{R}_1 以外の全てのレジスターの内容を 0 にする.

P で使用されるレジスターを \mathcal{R}_{M-1} までとし, P の行数を N とする. $d := M + N + 1$ とおく. 各 $i \geq 0$ に対し, \mathbb{Z}^d の標準基底 (i 番目 (0 から数える) の成分だけが 1 で他は全て 0 というベクトル) を $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ と書く. \mathbb{Z}^d 内のベクトルを, 見やすさのため, 前半の M 個の成分と後半の $N + 1$ 個の成分に分けて $(x_0, \dots, x_{M-1} \mid x_M, \dots, x_{M+N})$ のように書く. 前半の M 個の成分はレジスター $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{M-1}$ の内容を保持するために用い, 後半の $N + 1$ 個は現在実行している行番号を保持するために用いる.

次の条件が成り立つようにベクトルのリスト L を構成したい.

$$\begin{aligned} & \text{入力 } x \text{ に対し } P \text{ を実行すると } y \text{ を出力して停止する} \\ \iff & (x + 1, 0, \dots, 0) \text{ から始まる vector game } L \text{ が } (0, y + 1, 0, \dots, 0) \text{ で停止する.} \end{aligned}$$

実際には以下のように構成すればよい.

1. P の各行に対して,

- l 行目が $\text{inc } \mathcal{R}_i, (m)$ だったら

$$e_i - e_{M+l} + e_{M+m} = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0 \mid 0, \dots, \overset{M+l}{-1}, \dots, \overset{M+m}{1}, \dots, 0)$$

を L の末尾に加える.

- l 行目が $\text{jnzdec } \mathcal{R}_i, (m), (n)$ だったら

$$\begin{aligned} -e_i - e_{M+l} + e_{M+m} &= (0, \dots, \overset{i}{-1}, \dots, 0 \mid 0, \dots, \overset{M+l}{-1}, \dots, \overset{M+m}{1}, \dots, 0), \\ -e_{M+l} + e_{M+m} &= (0, \dots, 0 \mid 0, \dots, \overset{M+l}{-1}, \dots, \overset{M+m}{1}, \dots, 0) \end{aligned}$$

をこの順番で L の末尾に加える.

2. 最初に行番号を 0 にするために $-e_0 + e_M = (-1, 0, \dots, 0 \mid 1, 0, \dots, 0)$ を L の末尾に加える.

3. 最後にプログラムを停止するために $e_1 - e_{M+N} = (0, 1, 0, \dots, 0 \mid 0, \dots, 0, -1)$ を L の末尾に加える. □

例 1.4. Minsky 機械のプログラム P を次のものとする.

- (0) jnzdec $\mathcal{R}_0, (1), (3)$
- (1) inc $\mathcal{R}_1, (2)$
- (2) inc $\mathcal{R}_1, (0)$

このプログラムは入力を 2 倍する関数 $f(x) = 2x$ を計算するプログラムである. このプログラムに対応する vector game のリスト L は次のようになる.

- $v_1 = (-1, 0 \mid -1, 1, 0, 0)$
- $v_2 = (0, 0 \mid -1, 0, 0, 1)$
- $v_3 = (0, 1 \mid 0, -1, 1, 0)$
- $v_4 = (0, 1 \mid 1, 0, -1, 0)$
- $v_5 = (-1, 0 \mid 1, 0, 0, 0)$
- $v_6 = (0, 1 \mid 0, 0, 0, -1).$

これを $v = (2 + 1, 0 \mid 0, 0, 0, 0)$ から開始すると

$$\begin{aligned} (3, 0 \mid 0, 0, 0, 0) &\xrightarrow{+v_5} (2, 0 \mid 1, 0, 0, 0) \xrightarrow{+v_1} (1, 0 \mid 0, 1, 0, 0) \xrightarrow{+v_3} (1, 1 \mid 0, 0, 1, 0) \\ &\xrightarrow{+v_4} (1, 2 \mid 1, 0, 0, 0) \xrightarrow{+v_1} (0, 2 \mid 0, 1, 0, 0) \xrightarrow{+v_3} (0, 3 \mid 0, 0, 1, 0) \\ &\xrightarrow{+v_4} (0, 4 \mid 1, 0, 0, 0) \xrightarrow{+v_2} (0, 4 \mid 0, 0, 0, 1) \xrightarrow{+v_6} (0, 5 \mid 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

で停止し, 入力 2 に対する P の出力値は $5 - 1 = 4$ であるとわかる.

問題 1.5 (fraction game (rational game)).

Input: 正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と有限個の正の有理数のリスト $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{Q}_{>0}$

Question: n に対し「 $q_i n \in \mathbb{Z}$ を満たすような最初の q_i を n にかける」という操作を無限に繰り返すことはできるか?

系 1.6 (Conway [3], 1972). fraction game は決定不能である.

証明. 任意の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ は次の形に一意的に素因数分解できる:

$$q = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} \dots \quad (e_p \in \mathbb{Z}).$$

よって, 写像 $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ を $v = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{Z}^d$ に対し $f(v) := 2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3} \dots \in \mathbb{Q}_{>0}$ と定めれば, $v \in \mathbb{N}^d \iff f(v) \in \mathbb{Z}$ だから

$$\begin{aligned} &v \text{ から始まる vector game } v_1, \dots, v_k \text{ が停止する} \\ \iff &f(v) \text{ から始まる fraction game } f(v_1), \dots, f(v_k) \text{ が停止する} \end{aligned}$$

となる. □

例 1.7. 例 1.4 のベクトルのリスト L を有理数に書き直すと, $2^3 = 8$ から始まる fraction game

$$\begin{aligned} q_1 &= 2^{-1}3^05^{-1}7^111^013^0 = \frac{7}{10} \\ q_2 &= 2^03^05^{-1}7^011^013^1 = \frac{13}{5} \\ q_3 &= 2^03^15^07^{-1}11^113^0 = \frac{33}{7} \\ q_4 &= 2^03^15^17^011^{-1}13^0 = \frac{15}{11} \\ q_5 &= 2^{-1}3^05^17^011^013^0 = \frac{5}{2} \\ q_6 &= 2^03^15^07^011^013^{-1} = \frac{3}{13} \end{aligned}$$

を得る. 先程と同様にして $8 \xrightarrow{q_5} 20 \xrightarrow{q_1} \dots \xrightarrow{q_6} 3^5 = 243$ で停止する.

余談 1.8. John H. Conway は, fraction game で Minsky 機械の計算をシミュレートできることを利用して, 分数だけを使って計算するプログラミング言語 **Fractran** を作った.*2Fractran はジョーク言語ないし難解言語の一種である. 興味のある読者は Conway の論文 [4] を参照のこと.

2 一般化 Collatz 問題

Collatz 予想とは, 次のような数学の予想である.

予想 2.1. 自然数上の関数 $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を

$$T(x) := \begin{cases} 3x + 1 & \text{if } x \text{ が奇数,} \\ x/2 & \text{if } x \text{ が偶数} \end{cases}$$

と定める. このとき, 任意の正整数 n に対し, ある k が存在して $T^k(n) = \underbrace{T(T(\dots T(n)\dots))}_k = 1$ となるであろう.

この予想そのものは非常に難しく, 2018 年現在未解決であるが, 本節ではこの予想を一般化した決定問題を考え, その決定不能性を証明する.

具体的には次のような問題である.

問題 2.2 (一般化 Collatz 問題 (generalized Collatz problem)).

Input: 正整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ と有理数 $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{Q}$ であって, $n \equiv r \pmod{m}$ ならば $a_r n + b_r \in \mathbb{Z}$ となるようなもの

Question: 全ての正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について「 $n \equiv r \pmod{m}$ ならば $a_r n + b_r$ を改めて n とおく」という操作を繰り返すといずれ 1 に到達するか?

例 2.3. オリジナルの Collatz 予想は $m = 2, a_0 = 1/2, b_0 = 0, a_1 = 3, b_1 = 1$ の場合に相当する. (当たり前だが, この入力に対する答えが YES か NO かは未解決である.)

*2 Fractran という名称はプログラミング言語 Fortran のもじりらしい.

定理 2.4 (Conway [3], 1972). 一般化 Collatz 問題は決定不能である.

証明. Kurtz と Simon の論文 [2] に沿って証明する.

仮に一般化 Collatz 問題が決定可能だったとすると, Minsky 機械の停止問題も決定可能となってしまうことを示す. 任意に Minsky 機械のプログラム P をとる. vector game, fraction game の決定不能性の証明と同様にして P に対応する有理数のリスト $q_1 = n_1/d_1, q_2 = n_2/d_2, \dots, q_k = n_k/d_k$ (a_i と d_i は互いに素な正整数) をとる. $m := \text{lcm}(d_1, d_2, \dots, d_k)$ とおく. 各 $r = 0, 1, \dots, m-1$ に対し, $b_r := 0$ と定める. a_r については次の手順に従って定める:

1. 各 $i = 1, 2, \dots, k$ に対し, d_i のそれぞれの倍数 $cd_i < m$ ($c = 0, 1, \dots$) について, a_{cd_i} が未定義ならば $a_{cd_i} := q_i$ と定義する.
2. 3 の冪 $3^c < m$ ($c = 1, 2, \dots$) について, $a_{3^c} := 1/3$ と定義する.*³
3. 未定義のまま残った a_r は全て 1 とする.

このように定義すると, 任意の正整数 n に対して「 $q_i n \in \mathbb{Z}$ となる最初の q_i をかける」という操作と「 $n \equiv r \pmod{m}$ ならば $a_r n + b_r$ を改めて n とおく」という操作は同じになる. $q_i n \in \mathbb{Z}$ となる q_i が存在しないならば, それは P が停止したことを意味する. \mathcal{R}_1 の値を出力値とするという条件からこのとき n は 3 の冪でなければならず, a_r の定め方から 1 に到達するまで 3 で割られ続ける. したがって, 一般化 Collatz 問題 $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1}$ が 1 に到達するかを調べれば P の停止性がわかる. \square

参考文献

- [1] y., カウンター機械 (レジスター機械) (2018), <http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/counter-machine.pdf>.
- [2] S. A. Kurtz, J. Simon, The Undecidability of the Generalized Collatz Problem, *Theory and Applications of Models of Computation*, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4484, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 542–553, https://doi.org/10.1007/978-3-540-72504-6_49.
- [3] J. H. Conway, Unpredictable Iterations, in Proc. 1972 Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, CO, 1972, 49–52.
(reprint version is available in: J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: the $3x + 1$ problem*, Amer. Math. Soc., 2010, 219–223.)
- [4] J. H. Conway, FRACTRAN: A Simple Universal Programming Language for Arithmetic, in Open Problems in Communication and Computation (T. M. Cover and B. Gopinath, Eds.), Springer-Verlag, 1987, 4–26.
(reprint version is available in: J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: the $3x + 1$ problem*, Amer. Math. Soc., 2010, 249–264.)
- [5] P. Michel, M. Margenstern, Generalized $3x + 1$ functions and the theory of computation, in J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: the $3x + 1$ problem*, Amer. Math. Soc., 2010, 105–127.

*³ vector game の決定不能性の証明から, d_i が 3 の冪となるような i は存在しないので, このように定義することができる.

変更履歴

2018/07/04 公開

2018/07/04 証明を修正