自由群と **Nielsen–Schreier** の定理
—組合せ群論への入門—

y. (@waidotto)

2021 年 9 月 18 日 @ 第 2 回すうがく徒のつどい@オンライン 1 日目

`http://iso.2022.jp/math/tsudoi/online2/slide.pdf`

目次

1. 本講演の概要

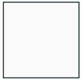
本講演の主目的である，Nielsen–Schreier の定理の主張を述べる．

幾何学的には⋯⋯

図形・空間などの数学的対象の対称性を表す量であり，対象の「形を変えない変換」(=自己同型写像) を集めたもの．

$\rightsquigarrow \{0^\circ$ 回転, 180° 回転 $\}$

$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} 0^\circ \text{ 回転}, 180^\circ \text{ 回転}, \\ x \text{ 軸で反転}, y \text{ 軸で反転} \end{array} \right\}$



$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} 0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ,\ 270^\circ \text{ 回転}, \\ x \text{ 軸},\ y \text{ 軸},\ \text{対角線} \times 2 \text{ で反転} \end{array} \right\}$

代数学的には⋯⋯

集合 G とその上の二項演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ であって，$\circ$ が結合律をみたし，$\circ$ に関する (唯一の) 単位元 1_G をもち， すべての元が $\circ$ に関する逆元をもつもの．

$G = \{e, a, b, c\}$,

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

組合せ群論とは，群論の中でも，群の生成元と関係式による表示に着目して群を調べる分野である．

例

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle\, x \mid x^n = 1 \,\rangle, \quad \mathbb{Z}^2 = \langle\, x, y \mid xy = yx \,\rangle, \quad \mathbb{Z} = \langle\, x \mid \rangle, \quad \{1\} = \langle \mid \rangle.$$

関係式のない表示をもつ群を自由群という．$\mathbb{Z}$ や $\{1\}$ は自由群の例である．

本講演の目標は次の定理である:

定理 (Nielsen (1921), Schreier (1926))

自由群の部分群は自由群である．

この定理は様々な証明が知られているが，今回は [Ser80] の証明に倣う．

2. 自由群

ここでは自由群と呼ばれる，群の公理以外に特別な関係式をまったく持たない群について説明する．

定義

集合 X に対し，形式的な逆元の集合を $X^{-1} := \{\, x^{-1} \mid x \in X \,\}$ とおく．
$X \cup X^{-1}$ の元の有限列を X 上の語と呼び，語の全体の集合を
$(X \cup X^{-1})^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \cup X^{-1})^n$ とおく．長さ 0 の列 (空列) を ε で表す．

語 u, v に対し，$(X \cup X^{-1})^*$ 上の同値関係 $\sim$ を，u に「xx^{-1} または $x^{-1}x$ ($x \in X$) の形の元を挿入または削除する」操作を有限回施すことにより v が得られるとき $u \sim v$ と定める．

X を自由基底とする自由群 (free group) を $\mathrm{F}(X) := (X \cup X^{-1})^* / \sim$ と定義する．$\mathrm{F}(X)$ の演算は語の連接によって定義される．

例

自由群 $\mathrm{F}(\{x, y\})$ において

$$xy^2x^{-1}xy^{-1}x^{-3} = xy^2y^{-1}x^{-3} = xyx^{-3} = x^{-2}x^3yx^{-3}.$$

自由群の具体例

例

- $\mathrm{F}(\emptyset) = \{[\varepsilon]\} \cong \{1\}$.
- $\mathrm{F}(\{x\}) = \{\, [x^n] \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \cong \mathbb{Z}$.

以降，$\mathrm{F}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ を単に $\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)$ と表し，語の同値類 $[w]$ も単に w で表すことにする．

例

$$\mathrm{F}(x, y) = \left\{ \begin{array}{c} 1, x, y, x^{-1}, y^{-1}, x^2, xy, xy^{-1}, yx, y^2, yx^{-1}, \\ x^{-1}y, x^{-2}, x^{-1}y^{-1}, y^{-1}x, y^{-1}x^{-1}, y^{-2}, x^3, \ldots \end{array} \right\}$$

3. グラフ

グラフと呼ばれる組合せ論的対象を導入し，基本的な用語の定義を述べる．

グラフとは，いくつかの頂点をいくつかの辺で結んだ図形をいう．

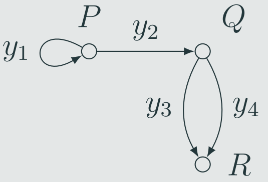
定義 (グラフ)

グラフとは，以下のデータからなる 5 つ組 $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ である．

1. 頂点の集合 V,
2. 辺の集合 E,
3. 辺の始点を与える関数 $s\colon E \to V$,
4. 辺の終点を与える関数 $t\colon E \to V$,
5. 辺の反転を与える関数 $\bar{\cdot}\colon E \to E$ で，次をみたすもの:

   $$\bar{y} \neq y, \quad \bar{\bar{y}} = y, \quad s(\bar{y}) = t(y), \quad t(\bar{y}) = s(y).$$

例



$$V = \{P, Q, R\},$$

$$E = \left\{ \begin{matrix} y_1, \bar{y}_1, y_2, \bar{y}_2, \\ y_3, \bar{y}_3, y_4, \bar{y}_4 \end{matrix} \right\}$$

定義 (グラフの向き)

グラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ の辺の集合 $E^+ \subseteq E$ であって $E = E^+ \sqcup \overline{E^+}$ をみたすもの (すなわち，任意の辺 $y \in E$ について $y \in E^+ \iff \bar{y} \notin E^+$ が成り立つもの) を Γ の向きと呼ぶ．

グラフ Γ の向き E^+ は辺 $y \in E$ とその反転の組 $\{y, \bar{y}\}$ の各々からちょうど一方のみを抜き出したものであるので，Γ の向きは $2^{|E|}$ 通りある．

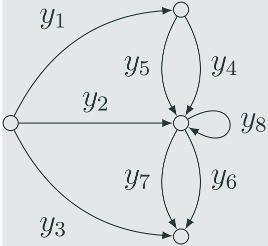
定義 (パス，閉路，単純閉路)

グラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ の辺の列 $(y_1, \dots, y_n)$ $(y_i \in E)$ であって，
$i = 1, 2, \dots, n-1$ について $t(y_i) = s(y_{i+1})$ であるものを長さ n のパスと呼ぶ．

パス $\pi = (y_1, \dots, y_n)$ が $t(y_n) = s(y_1)$ をみたすとき，特に閉路と呼ぶ．

閉路が $i = 1, 2, \dots, n-1$ について $y_{i+1} \neq \bar{y}_i$ をみたし，かつ閉路上の頂点 $s(y_1), \dots, s(y_n)$ がすべて異なるとき，特に単純閉路と呼ぶ．

例



- $\pi_1 = (y_1, y_4, \bar{y}_2, y_3, \bar{y}_6, y_7)$ はパスだが閉路でない．
- $\pi_2 = (y_1, \bar{y}_1), \pi_3 = (y_4, y_6, \bar{y}_7, \bar{y}_5)$ は閉路だが単純閉路でない．
- $\pi_4 = (y_1, y_5, \bar{y}_2), \pi_5 = (y_4, \bar{y}_5), \pi_6 = (y_8)$ は単純閉路．

連結グラフと木

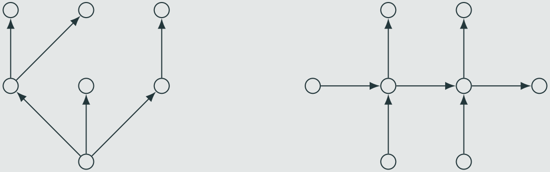
定義 (連結グラフ)

空でないグラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ が**連結である**とは，いかなる 2 点 $P, Q \in V$ に対しても，$s(y_1) = P, t(y_n) = Q$ となるパス $\pi = (y_1, \ldots, y_n)$ が存在するときをいう．

定義 (木)

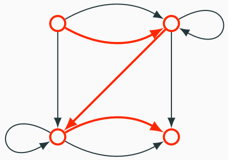
単純閉路をもたない連結グラフを**木**という．

例



定義 (全域木)

グラフ Γ の部分グラフ $T \subseteq \Gamma$ が全域木であるとは，T が Γ のすべての頂点を含む木であることをいう．



命題

連結グラフ Γ とその部分木 $T_0 \subseteq \Gamma$ に対し，T_0 を含む全域木 $T \subseteq \Gamma$ がとれる．

証明の概略.

Γ の T_0 を含む部分木全体の集合は帰納的集合になるので，Zorn の補題により極大元 T がとれ，この T が全域木になっている． □

グラフの準同型と同型

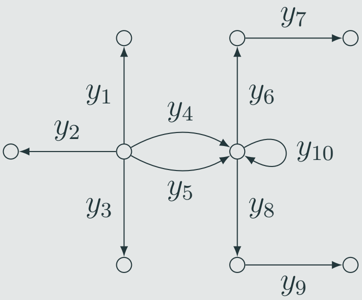
定義 (グラフ準同型写像)

2 つのグラフ $\Gamma_i = (V_i, E_i, s_i, t_i, \bar{\cdot}^i)$ $(i = 1, 2)$ の間のグラフの準同型写像 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ は以下のデータからなる.

1. 頂点間の写像 $f\colon V_1 \to V_2$ で $f(s_1(y)) = s_2(f(y)), f(t_1(y)) = t_2(f(y))$ をみたすもの.
2. 辺の間の写像 $f\colon E_1 \to E_2$ で $f(\bar{y}^1) = \overline{f(y)}^2$ をみたすもの.

グラフ準同型 f の頂点間の写像 $f\colon V_1 \to V_2$ と辺の間の写像 $f\colon E_1 \to E_2$ がともに全単射であるとき，f を同型写像と呼ぶ．Γ_1 から Γ_2 への同型写像があるとき，Γ_1 と Γ_2 は同型であるといい，$\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ と書く．グラフ Γ から自身の同型写像全体の集合 $\mathrm{Aut}(\Gamma) := \{\, f\colon \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ は同型写像} \,\}$ が写像の合成に関してなす群を Γ の自己同型群という.

例



左のグラフ Γ の自己同型写像は

- y_1, y_2, y_3 の置換,
- y_4, y_5 の置換,
- $(y_6, y_7), (y_8, y_9)$ の置換,
- y_{10} の反転 (y_{10} と $\bar{y}_{10}$ の置換)

の組合せだから,

$|\mathrm{Aut}(\Gamma)| = 3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ である.

4. Cayley グラフ: 群のかたち

群の Cayley グラフと呼ばれる対象を導入し，群を幾何学的な視点から調べる手法を開発する.

定義 (Cayley グラフ)

群 G とその部分集合 S に対し，G の S に関する Cayley グラフ $\mathrm{Cay}(G, S)$ は以下で定義されるグラフである．

1. $V = G$,
2. $E = \{\, (g, s) \mid g \in G, s \in S^{\pm 1} \,\}$,
3. $s(g, s) = g$,
4. $t(g, s) = gs$,
5. $\overline{(g, s)} = (gs, s^{-1})$.

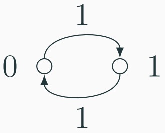
辺 (g, s) には $s \in S^{\pm 1}$ というラベルが貼られているものとみなす．

$S \cap S^{-1} = \emptyset$ のとき，$\mathrm{Cay}(G, S)$ には標準的な向き $E^{+} = G \times S \subseteq E$ が入る．

Cayley グラフの例: $\{1\}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$

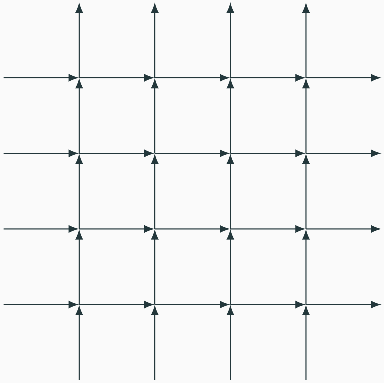
- $\mathrm{Cay}(\{1\}, \emptyset)$:

- $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{1\})$:



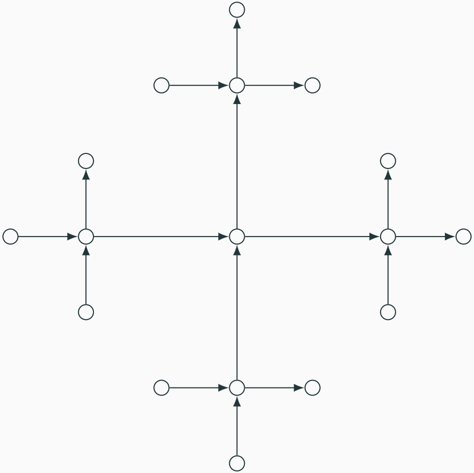
- $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$:

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{(1,0), (0,1)\})$:



Cayley グラフの例: $\mathrm{F}(x, y)$

$\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(x, y), \{x, y\})$:



命題

群 G と部分集合 $S \subseteq G$ に対し，次が成り立つ.

1. $G = \langle S \rangle \iff \mathrm{Cay}(G, S)$ は連結.
2. $1_G \notin S \iff \mathrm{Cay}(G, S)$ はループを含まない.
3. $S \cap S^{-1} = \emptyset \iff \mathrm{Cay}(G, S)$ は多重辺もループも含まない.

証明の概略.

1. 「$\langle S \rangle$ の元」と「1_G を始点とするパスの終点」の 1 対 1 対応より.
2. 辺 $y = (g, s)$ がループであることは $g = s(y) = t(y) = gs$，つまり $s = 1_G$ と同値だから.
3. $\mathrm{Cay}(G, S)$ の定義より，多重辺は $(g, s), (gs, s^{-1})$ という形のものしかない. $\square$

5. 群の作用，特にグラフへの作用

群の作用と軌道分解について復習し，グラフへの作用を考える.

定義 (作用)

X を集合とし，X から自身への全単射の全体が写像の合成に関してなす群を $\mathrm{Bij}(X)$ とおく．群 G の X への作用とは，群準同型写像 $\alpha\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ のことである．$g \in G, x \in X$ に対し $\alpha(g)(x)$ のことを $g \cdot x$ と略記する．G が X に作用していること，またはその状況を記号 $G \curvearrowright X$ で表す．

作用 α が自由であるとは，任意の $g \in G - \{1_G\}$ に対し $\alpha(g) \in \mathrm{Bij}(X)$ が不動点をもたない，つまりどの $x \in X$ に対しても $g \cdot x \neq x$ となることをいう．

例

- 作用 $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$ を $\theta \cdot z := e^{i\theta} z$ で定義すると，$2\pi \cdot z = z$ だから (または $\theta \cdot 0 = 0$ だから) 自由ではない．
- 作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ を $n \cdot x := x + n$ で定義すると自由である．

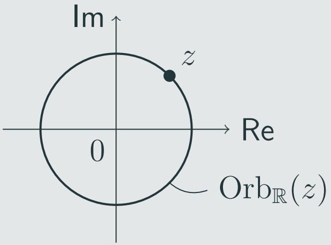
作用の軌道と商集合

定義 (作用の軌道と商)

群 G が集合 X に作用しているとき，元 $x \in X$ の軌道を $\mathrm{Orb}_G(x) := \{\, g \cdot x \mid g \in G \,\}$ と定義する．2 元 $x, y \in X$ に対し，関係 $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(y)$ は同値関係であるので，これによる商集合 $G \backslash X$ を考えることができる．

例

前ページの作用 $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$ について，$\mathrm{Orb}_{\mathbb{R}}(z) = \{\, w \in \mathbb{C} \mid |w| = |z| \,\}$ である．



定義 (グラフへの作用)

群 G のグラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ への作用とは，群準同型写像 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ のことである．作用 $G \curvearrowright \Gamma$ が反転なしであるとは，どの $g \in G, y \in E$ に対しても $g \cdot y \neq \bar{y}$ であることをいう．

反転なしの作用は商グラフを誘導する．

命題

作用 $G \curvearrowright \Gamma$ が反転なしであるとき，頂点集合と辺集合がそれぞれ $G\backslash V, G\backslash E$ であるような商グラフ $G\backslash\Gamma$ が well-defined に定まる．

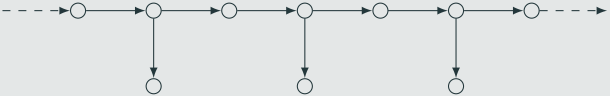
説明.

グラフの定義における条件 $\bar{y} \neq y$ が成り立つためには，反転なしであることが必要である． □

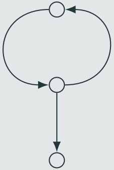
商グラフの例

例

無限グラフ

$\Gamma :=$ 

への $\mathbb{Z}$ の作用を 2 ずつの平行移動で定義すると，商グラフは

$\mathbb{Z}\backslash\Gamma =$ 

となる．

全域木の持ち上げ

補題

群 G の連結グラフ Γ への反転なしの作用 $G \curvearrowright \Gamma$ の商グラフ $\Gamma_* := G\backslash\Gamma$ について，商写像 $\pi\colon \Gamma \to \Gamma_*$ はグラフ準同型である．全域木 $T_* \subseteq \Gamma_*$ に対して，Γ の部分木 $T \subseteq \Gamma$ であって π の T への制限が T_* と同型になるようなものがとれる．このような T を T_* の持ち上げという．

証明の概略.

「Γ の部分木 T' で，π の T' への制限が T_* への単射になっているもの」全体の集合は帰納的集合になるので，Zorn のにより極大元 T がとれる．仮に T が T_* と同型でないとすると，T_* が木であるという条件から T に辺を追加することができるので極大性に反する． $\square$

この補題において「T_* が木である」という条件は本質的である．

群 G とその部分集合 $S \subseteq G$ について，G の Cayley グラフ $\mathrm{Cay}(G, S)$ への標準的な作用 $G \curvearrowright \mathrm{Cay}(G, S)$ が

- $g' \in G, g \in V = G$ について $g' \cdot g := g'g$，
- $g' \in G, (g, s) \in E$ について $g' \cdot (g, s) := (g'g, s)$

によって定まる．辺 (g, s) に元 g' を作用させても辺のラベル s は変化しないことに注意する．特に，$S \cap S^{-1} = \emptyset$ なら G は $\mathrm{Cay}(G, S)$ に反転なしで作用する．

6. Nielsen–Schreier の定理

Nielsen–Schreier の定理を証明し，具体例を見る．

定理 (Nielsen–Schreier)

自由群の部分群は自由群である．

2 ステップに分けて証明する．以下が示せればよい．

1. 群 G と部分集合 $S \subseteq G$ について，$[G \cong \mathrm{F}(S) \iff \mathrm{Cay}(G, S)$ が木$]$．
2. 群 G が木 Γ に自由かつ反転なしで作用するとき，ある部分集合 $S \subseteq G$ について $\mathrm{Cay}(G, S)$ は木になる．

証明.

自由群 $\mathrm{F}(X)$ とその部分群 $G \subseteq \mathrm{F}(X)$ について，1 の $\Longrightarrow$ より $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X), X)$ は木である．ここで作用 $G \curvearrowright \mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X), X)$ は自由かつ反転なしだから，2 よりある $S \subseteq G$ について $\mathrm{Cay}(G, S)$ は木である．よって 1 の $\Longleftarrow$ より同型 $G \cong \mathrm{F}(S)$ を得る． $\square$

証明.

($\Longrightarrow$) 仮定より $G = \langle S \rangle$ だから $\mathrm{Cay}(G,S)$ は連結グラフである．また，仮に $\mathrm{Cay}(G,S)$ が単純閉路をもつとすると，$\mathrm{F}(S)$ が非自明な関係式をもつことになってしまい，自由群の定義に反する．

($\Longleftarrow$) 同様にして，$\mathrm{Cay}(G,S)$ が連結であることより $G = \langle S \rangle$ が成り立つ．また $\mathrm{Cay}(G,S)$ が単純閉路をもたないことから，G の任意の元は $\mathrm{Cay}(G,S)$ 内の単純パスによって一意的に表される．したがって G は非自明な関係式をもたないので，同型 $G \cong \langle\, S \mid \,\rangle \cong \mathrm{F}(S)$ を得る． $\square$

証明.

作用 $G \curvearrowright \Gamma$ が反転なしであることより，商グラフ $\Gamma_* := G\backslash\Gamma$ がとれる．Γ_* の全域木 $T_* \subseteq \Gamma_*$ 持ち上げ $T \subseteq \Gamma$ をとる．T_* が全域木であることと G の作用が自由であることより $V = \bigsqcup_{g\in G} gT$ が成り立つ．Γ の向き $E^+ \subseteq E$ を一つとり，$S := \{\, s \in G \mid \exists y \in E^+ \; [s(y) \in T, t(y) \in sT] \,\}$ とおく．グラフ $\Gamma' = (V', E', s, t, \bar{\cdot})$ を，Γ 内の gT $(g \in G)$ たちを「1 点に潰した」グラフとする．具体的には，$V' := \{\, gT \mid g \in G \,\}, E' := E - \bigsqcup_{g\in G} gT$ とおく．このとき

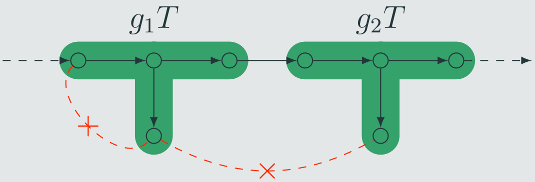
1. Γ が木であることより Γ' も木であること，
2. $g \mapsto gT$ によってグラフ準同型 $f\colon \mathrm{Cay}(G, S) \to \Gamma'$ が定まり，さらに f はグラフ同型であること

であることを言えば，$\mathrm{Cay}(G, S)$ が木であることが結論される． □

Step 2.1: Γ' が木であること

証明の概略.

作り方から Γ' が連結であることはよい．もし Γ' に単純閉路があれば，Γ にも単純閉路ができてしまうことを言えばよい．このことは次のような図を考えればわかる．



□

Step 2.2: $f\colon \mathrm{Cay}(G,S) \to \Gamma'$ はグラフ同型

証明の概略.

(準同型性) $\mathrm{Cay}(G,S)$ の辺 (g,s) を任意にとる．S の定義より T と sT を結ぶ Γ の辺 y があるから，$g\cdot y$ は gT と gsT を結ぶ辺であり，Γ が木であることより gT と gsT の間に他の辺はない．よって $f(g,s) := g\cdot y$ とおけばよい．

(全射性) 頂点集合の間の全射性は明らかで，辺集合の間の全射性は Γ' が木であることからわかる．

(単射性) $f(g_1,s_1) = f(g_2,s_2)$ であるとすると，ある共通の辺 y が $i=1,2$ に対し g_iT と g_is_iT を結んでいる．このとき Γ' における y の始点は $g_1T = g_2T$ だから G の作用が自由であることより $g_1 = g_2$ でなければならず，同様に終点は $g_1s_1T = g_2s_2T$ だから $s_1 = s_2$ でなければならない. $\square$

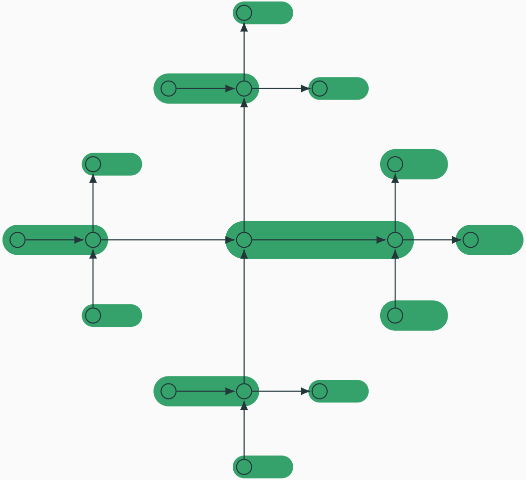
階数 2 の自由群 $\mathrm{F}(x, y)$ の部分群 G を

$$\begin{aligned} G &:= \langle \{ \, w \in \mathrm{F}(x,y) \mid w \text{ は長さが } 2 \, \} \rangle \\ &= \langle x^2, xy, xy^{-1}, x^{-2}, x^{-1}y, x^{-1}y^{-1}, y^2, yx, yx^{-1}, y^{-1}x, y^{-1}x^{-1}, y^{-2} \rangle \end{aligned}$$

とおくと，$G \lhd \mathrm{F}(x, y)$ である (共役をとっても長さが偶数のままだから)．G の元をかけることにより $\mathrm{F}(x, y)$ のどの元も 1 または x にすることができるので，商グラフ $\Gamma_* := G \backslash \operatorname{Cay}(\mathrm{F}(x, y), \{x, y\})$ は以下のようなグラフになる:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Orb}(1) \arrow[r, bend left=50, "y"] \arrow[r, bend left=10, "x"] & \mathrm{Orb}(x) \arrow[l, bend left=10, "x"] \arrow[l, bend left=50, "y"] \end{tikzcd}$$

ここで Γ_* の全域木の持ち上げとして $T = \begin{tikzcd} \underset{\mathrm{Orb}(1)}{\circ} \arrow[r, "x"] & \underset{\mathrm{Orb}(x)}{\circ} \end{tikzcd}$ をとると，Γ' は次ページのようになる．



$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{yx^{-1}T} & & \boxed{xyT} & \\
\boxed{x^{-2}T} \arrow[rr] & & \boxed{T} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \boxed{x^2T} \\
 & \boxed{y^{-1}x^{-1}T} \arrow[ur] & & \boxed{xy^{-1}T} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

このとき $S = \{x^2, xy, yx^{-1}\}$ だから $G \cong \mathrm{F}(x^2, xy, yx^{-1})$ である.

7. 参考文献

おしまい．ご清聴ありがとうございました．

[Ser80] J.-P. Serre, Trees, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.