

有限生成無限単純群の構成

y. (@waidotto)

2021年3月21日 @ すうがく徒のつどい@オンライン2日目

<http://iso.2022.jp/math/tsudoi/online1/slide.pdf>

1. 概要
2. 自由群と群の表示
3. 自由積と融合積
4. Baumslag–Solitar 群 $BS(1, 2)$
5. 有限生成無限単純群の構成
6. 参考文献

1. 概要

この講演の目標となる，有限生成無限単純群について説明する．

単純群 (simple group) とは、群たちの中で素数のような役割を果たす群である。

定義

群 G が**単純** (simple) であるとは、 G が $\{1_G\}$ と G 以外の正規部分群を持たないことをいう。

- $n (\geq 2)$ が素数 $\iff n$ はより小さな自然数 $a, b < n$ から掛け算 $a \cdot b$ によって作ることができない
- G が単純群 $\iff G$ はより小さな群 N, Q から**群の拡大** (group extension)

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1 \quad (\text{短完全系列})$$

によって作ることができない

単純群の例

アーベル群が単純群であることと、位数が素数であることは同値である。

有限な単純群については分類が既に完了している (らしい).

有限単純群の分類定理 (see e.g. [Asc04])

すべての有限単純群は以下のいずれかに同型である.

1. 素数位数の巡回群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. 交代群 A_n .
3. Lie 型の単純群.
4. 26 個の散在型有限単純群.

したがって、次に問うべきは

「無限な単純群にはどのようなものがあるのか？」

という問題である.

無限単純群が存在することそれ自体はそれほど難しくない。

定理

\mathbb{Q} 上の射影線形群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})/\{\pm I\}$ は単純群である。

証明.

例えば [Lan05, Chapter VI, Theorem 3.8] などを見よ。 □

ここで、 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ は有限生成ではない。(実際、 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ のどんな有限部分集合も分母に有限種類の素因数しか持たないため、十分大きな素数 p について例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を生成できない。)

さらなる疑問: 有限生成な無限単純群は存在するか?

→ Yes! (Higman [Hig51])

2. 自由群と群の表示

ここでは群の表示と呼ばれる、写像や図形、行列といった対象を使わずに直接的に群を定義する手法を導入する。

定義

集合 X に対し、形式的な逆元の集合を $X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\}$ とおく。
 $X \cup X^{-1}$ の元の有限列を X 上の語 (word) と呼び、語の全体の集合を
 $(X \cup X^{-1})^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \cup X^{-1})^n$ とおく。長さ 0 の列 (空列) を ε で表す。

語 u, v に対し、 $(X \cup X^{-1})^*$ 上の同値関係 \sim を、 u に「 xx^{-1} または $x^{-1}x$
($x \in X$) の形の元を挿入または削除する」操作を有限回施すことにより v が得られるとき $u \sim v$ と定める。

X を自由基底とする自由群 (free group) を $F(X) := (X \cup X^{-1})^*/\sim$ と定義する。
 $F(X)$ の演算は語の連接 (concatenation) によって定義される。

例

自由群 $F(\{x, y\})$ において

$$xy^2x^{-1}xy^{-1}x^{-3} = xy^2y^{-1}x^{-3} = xyx^{-3} = x^{-2}x^3yx^{-3}.$$

例

- $F(\emptyset) = \{[\varepsilon]\} \cong \{1\}$.
- $F(\{x\}) = \{[x^n] \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

以降, $F(\{x_1, \dots, x_n\})$ を単に $F(x_1, \dots, x_n)$ と表し, 語の同値類 $[w]$ も単に w で表すことにする.

例

$$F(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x, y, x^{-1}, y^{-1}, x^2, xy, xy^{-1}, yx, y^2, yx^{-1}, \\ x^{-1}y, x^{-2}, x^{-1}y^{-1}, y^{-1}x, y^{-1}x^{-1}, y^{-2}, x^3, \dots \end{array} \right\}$$

群を定義する便利な方法のひとつに、群の表示がある。群の表示は群を生成元と関係式で表す方法であり、群を写像や図形を用いずに定義できる。

雰囲気をつかむための例

$G := \langle x, y \mid x^4 = 1, y^2 = 1, (yx)^2 = 1 \rangle$ とおく。 G は $\{x, y\}$ 上の語の集合を、自由群のときの「 $xx^{-1}, x^{-1}x, yy^{-1}, y^{-1}y$ を挿入/削除する」操作に加えて「 $x^4, y^2, (yx)^2$ を挿入/削除する」操作も許可した場合の同値関係で割った群である。

G においては

$$yx = yxyy^{-1} = yxyxx^{-1}y^{-1} = x^{-1}y^{-1} = x^4x^{-1}y^{-1} = x^3y^{-1}y^2 = x^3y$$

が成り立つので、 G のどの元も $\{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$ のいずれかに等しい。よって G は二面体群 D_4 に同型である (x が $\pi/2$ 回転, y が反転に対応する)。

定義

群 G の部分集合 $R \subseteq G$ に対し, R を含む G の最小の正規部分群

$$\langle\langle R \rangle\rangle = \langle \{grg^{-1} \mid r \in R, g \in G\} \rangle$$

を G における R の正規閉包 (normal closure) とよぶ.

定義

集合 X と部分集合 $R \subseteq F(X)$ が与えられたとき,

$$\langle X \mid R \rangle := F(X) / \langle\langle R \rangle\rangle$$

とおく.

X と R がともに有限集合のとき, 群 $\langle X \mid R \rangle$ は有限表示群であるという.

$\langle \{x_1, \dots, x_n\} \mid \{r_1, \dots, r_m\} \rangle$ を $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ と書く. また, 関係 $r \in R$ を $r = 1$ と書いたり, $u^{-1}v \in R$ を $u = v$ と書いたりしてもよい.

この定義は本当に前頁の説明と同じになっているだろうか?

観察

- 語 $w_1w_2 \in F(X)$ に $r \in R$ を挿入して w_1rw_2 に書き換えることは $w_1w_2 \cdot w_2^{-1}rw_2 = w_1rw_2$ のように, r の w_2^{-1} による共役 $w_2^{-1}rw_2$ を右からかけることで達成できる.
- 同様に, 語 w_1rw_2 から r を削除するには $w_2^{-1}r^{-1}w_2$ を右からかければよい.

よって R の元の挿入または削除によって u を v に書き換えられるなら $u^{-1}v \in \langle\langle R \rangle\rangle$, つまり $\langle X \mid R \rangle$ において $u = v$ となる. 逆に $u^{-1}v \in \langle\langle R \rangle\rangle$ なら

$$v = u \cdot g_1 r_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k r_k^{\pm 1} g_k^{-1}$$

とかけるが, このとき v は u に R の元を有限回挿入または削除したのになっている.

例

- $\langle X \mid \rangle \cong F(X)$.
- $\langle x \mid x^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle = \langle x, y \mid xy = yx \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.
- $\langle x, y \mid x^4 = y^2 = (yx)^2 = 1 \rangle \cong D_4$.

3. 自由積と融合積

有限生成無限単純群の構成において重要となる融合積について説明する.

定義

群の表示 $G_1 = \langle X_1 \mid R_1 \rangle, G_2 = \langle X_2 \mid R_2 \rangle$ に対し, 群

$$G_1 * G_2 := \langle X_1 \sqcup X_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$$

を G_1 と G_2 の自由積 (free product) と呼ぶ. さらに群 A と群準同型

$f_1: A \rightarrow G_1, f_2: A \rightarrow G_2$ があるとき, 群

$$G_1 *_A G_2 := \langle X_1 \sqcup X_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{ f_1(a) = f_2(a) \mid a \in A \} \rangle$$

を G_1 と G_2 の融合積 (amalgamated product) という (ただし, $f_1(a), f_2(a)$ はそれぞれ X_1, X_2 上の語とする).

注意

上の定義は群そのものではなく群の表示に依存した定義になっているので, well-defined 性は自明ではない. ここでは well-defined 性の証明はしないが, 例えば自由積, 融合積がそれぞれ群の圏 \mathbf{Grp} における coproduct と pushout の定義をみたすことを示すとよい.

融合積 $G_1 *_A G_2$ は自由積 $G_1 * G_2$ の中で $f_1(A) \subseteq G_1$ と $f_2(A) \subseteq G_2$ を同一視する (= “貼り合わせる”) ことで得られる.

例

- $A = \{1_A\}$ のとき $G_1 *_A G_2 = G_1 * G_2$.
- $G *_G G \cong G$.
- $G_1 = F(X_1), G_2 = F(X_2)$ のとき $G_1 * G_2 = \langle X_1 \sqcup X_2 \mid \quad \rangle = F(X_1 \sqcup X_2)$.
- $\underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_n \cong F(x_1, \dots, x_n)$.
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

融合積は一見すると非常に技巧的に見えるが、位相空間の基本群を考えるときに自然に現れる概念である。

定理

位相空間 $X = U \cup V$ において $U, V, U \cap V$ が弧状連結であるとき、

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$$

が成り立つ。

また、群を「何らかの空間の基本群とみなす」考え方は数学の至る所で現れる重要なアイデアである。

群準同型 $f_1: A \rightarrow G_1, f_2: A \rightarrow G_2$ が単射であると仮定する.

補題

自然な写像 $f: A \rightarrow G_1 *_A G_2$ も単射である.

証明は容易 (圏論的に示すと楽).

補題

$x_i \in G_i$ で生成される部分群 $H_i := \langle x_i \rangle \subseteq G_i$ が $H_i \cap f_i(A) = \{1_{G_i}\}$ をみたすとする. このとき, x_1, x_2 で生成される部分群 $\langle x_1, x_2 \rangle \subseteq G_1 *_A G_2$ は $\langle x_1, x_2 \rangle \cong H_1 * H_2$ をみたす.

証明の概略.

自然な準同型 $f: H_1 * H_2 \rightarrow G_1 *_A G_2$ は $\text{Im}(f) = \langle x_1, x_2 \rangle$ をみたし, さらに仮定より $\text{Ker}(f) = \{1\}$ が示せる. \square

4. Baumslag–Solitar 群 $BS(1, 2)$

今回の話において重要な Baumslag–Solitar 群 (の特
殊な場合) について説明する.

定義

Baumslag-Solitar 群は自然数 m, n ごとに

$$\text{BS}(m, n) := \langle a, b \mid ba^m b^{-1} = a^n \rangle$$

と定義される有限表示群である。

今回は $\text{BS}(1, 2) = \langle t, h \mid hth^{-1} = t^2 \rangle$ のみ用いる。BS(1, 2) は次のようなアフィン変換が合成に関してなす群だと考えるとわかりやすい:

$$t(z) := z + 1, \quad t^{-1}(z) := z - 1, \quad (\text{平行移動})$$

$$h(z) := 2z, \quad h^{-1}(z) := \frac{1}{2}z. \quad (\text{拡大・縮小})$$

実際, $hth^{-1}(z) = 2(\frac{1}{2}z + 1) = z + 2 = t^2(z)$ をみたく。よって群準同型 $f: \text{BS}(1, 2) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}[1/2])$ を

$$f(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(h) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると well-defined になる。

$BS(1, 2) \cong \langle (\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \rangle$ を示すためには, f の単射性を示す必要がある.

$f: BS(1, 2) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}[1/2])$ の単射性.

$\text{Ker}(f) = \{1\}$ を示せばよい. $\{t, h\}$ 上の語 w が $f(w) = I$ をみたすとする. このときアフィン変換としては $z = f(w)(z) = 2^i z + x$ ($i \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}[1/2]$) だから, w に含まれる h と h^{-1} の個数は等しい. よって

$$w = h^{m_1} t^{n_1} h^{-m_1} \dots h^{m_i} t^{n_i} h^{-m_i}$$

という形に変形できる. ここで $t = h^{-1} t^2 h$ という関係を繰り返し用いれば, 絶対値の十分大きな N を用いて

$$w = h^N t^{n'_1} h^{-N} \dots h^N t^{n'_i} h^{-N} = h^N t^{n'_1 + \dots + n'_i} h^{-N}$$

と書け, $f(w) = I$ より $n'_1 + \dots + n'_i = 0$ ゆえ $BS(1, 2)$ でも $w = 1$ となる. \square

系

$BS(1, 2)$ において, $\langle t \rangle \cong \langle h \rangle \cong \mathbb{Z}$ であり, また $\langle t \rangle \cap \langle h \rangle = \{1\}$ である.

5. 有限生成無限単純群の構成

Higman 群と呼ばれる群を用いて、有限生成無限単純群の例を与える。

補題

有限生成群 G が無限かつ、 G 以外の有限指数部分群を持たないとする。このとき、 G のある剰余群は有限生成無限単純群である。

証明.

$\Sigma := \{N \triangleleft G \mid N \neq G\}$ とおく。 Σ は包含関係に関して帰納的順序集合をなしている。 よって Zorn の補題より極大元 $N \in \Sigma$ がとれる。 仮定より N は有限指数部分群ではないので G/N は無限群であり、さらに N の極大性より G/N は単純群である。 \square

よって、有限生成無限単純群を構成するには

有限生成無限群 G で、 G 以外の有限指数部分群を持たないもの

を構成すればよい。このような群の例として、次の Higman 群がある。

4 元で生成される群

$$G := \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_2x_1x_2^{-1} = x_1^2, x_3x_2x_3^{-1} = x_2^2, x_4x_3x_4^{-1} = x_3^2, x_1x_4x_1^{-1} = x_4^2 \rangle$$

を **Higman 群** と呼ぶ.

定理 ([Hig51], see also [Ser80, Chapter I, Proposition 6])

群 G は以下の条件をみたす.

1. G の有限指数部分群は G しかない.
2. G は無限群である.

したがって Higman 群は前頁の所望の性質を持つ.

1. $G = \langle x_i \mid x_{i+1}x_ix_{i+1}^{-1} = x_i^2 \rangle$ ($i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) の有限指数部分群は G しかない。

証明.

$H \subseteq G$ を有限指数部分群とすると, $N := H \cap \bigcap_{i=1}^4 x_i H x_i^{-1}$ は G の有限指数正規部分群である. $\bar{G} := G/N$ とおき, $\bar{G} \neq \{1\}$ と仮定し矛盾を導く.

$i = 1, 2, 3, 4$ に対し, G/N における x_i の像を \bar{x}_i と書き, $n_i := \text{ord } \bar{x}_i$ とおく. \bar{G} は有限群だから n_i は正整数であり, $\bar{G} \neq \{1\}$ より少なくとも一つの n_i は 1 ではない. p を $n_1 n_2 n_3 n_4$ の最小の素因数とする. $p \mid n_1$ として一般性を失わない. 帰納法により, 任意の $k > 0$ に対し $x_1^{2^k} = x_2^k x_1 x_2^{-k}$ がわかる. よって

$$x_1^{2^{n_2}} = x_2^{n_2} x_1 x_2^{-n_2} = x_1$$

となるので $n_1 \mid (2^{n_2} - 1)$ であり, これと $p \mid n_1$ より $p \mid (2^{n_2} - 1)$, すなわち $2^{n_2} \equiv 1 \pmod{p}$ でなければならないので $p \neq 2$ となる. よって $2 \in \mathbb{F}_p^\times$ の位数 N は $1 < N \leq p - 1$ をみtas. 一方で $2^{n_2} \equiv 1 \pmod{p}$ より $N \mid n_2$ となるが, これは p の最小性に反する. □

2. $G = \langle x_i \mid x_{i+1}x_i x_{i+1}^{-1} = x_i^2 \rangle$ ($i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) は無限群である.

証明.

各 $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ に対し

$$G_{ij} := \langle x_i, x_j \mid x_j x_i x_j^{-1} = x_i^2 \rangle \cong \text{BS}(1, 2)$$

とおく. G_{ij} 内での x_i と x_j の位数は無限であり, さらに $\langle x_i \rangle \cap \langle x_j \rangle = \{1_{G_{ij}}\}$ である. よって $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (3, 4, 1)\}$ に対し

$$G_{ijk} := G_{ij} *_{\langle x_j \rangle} G_{jk} = \langle x_i, x_j, x_k \mid x_j x_i x_j^{-1} = x_i^2, x_k x_j x_k^{-1} = x_j^2 \rangle$$

とおくと $F(x_i, x_k) \subseteq G_{ijk}$ とみなせる. このとき

$F(x_1, x_3) \subseteq G_{123} *_{F(x_1, x_3)} G_{341} = G$ となるので G は無限群である. □

補題 (再掲)

有限生成群 G が無限かつ、 G 以外の有限指数部分群を持たないとする。このとき、 G のある剰余群は有限生成無限単純群である。

$$G := \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_2x_1x_2^{-1} = x_1^2, x_3x_2x_3^{-1} = x_2^2, x_4x_3x_4^{-1} = x_3^2, x_1x_4x_1^{-1} = x_4^2 \rangle$$

定理 (再掲)

群 G は以下の条件をみたす。

1. G の有限指数部分群は G しかない。
2. G は無限群である。

系

有限生成無限単純群が存在する。

- Higman が 1951 年に構成した群は有限生成ではあるが、有限表示であるかどうかはわからない。
- 有限生成よりさらに強く、有限表示な単純群も構成されているようである。
 - Thompson 群のうち T と V 。
 - Burger と Mozes は有限表示かつねじれの無い無限単純群を構成した。

6. 参考文献

おしまい. ご清聴ありがとうございました.

- [Asc04] M. Aschbacher, *The status of the classification of the finite simple groups*. Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), no. 7, 736–740.
- [Hig51] G. Higman, *A Finitely Generated Infinite Simple Group*. J. London Math. Soc. **26** (1951), 61–64.
- [Lan05] S. Lang, *Undergraduate Algebra (Third Edition)*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, NY, 2005.
- [Ser80] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.