Coalgebra としての Kripke フレーム *

y.†

2018 年 12 月 30 日

最終更新日: 2019 年 1 月 31 日

概要

様相論理において重要な概念として Kripke フレームがある．圏論の言葉で言えば，Kripke フレームとは $\mathcal{P}$-coalgebra のことである．様相論理では Kripke フレームを一般化した general frame というものも用いられる．本稿では [KKV04] に従い，Vietoris functor と呼ばれる関手 $\mathbb{V}$ を用いると general frame を $\mathbb{V}$-coalgebra とみなせることを確認する．

1 Kripke frames as coalgebras

まず，様相論理における基本的な概念である Kripke フレームを定義する．Kripke フレームが様相論理においてどのように用いられているのか，といったことについては [BdRV01] などの教科書を参照のこと．

定義 1.1 (Kripke フレーム, bounded morphism). **Kripke フレーム** (Kripke frame) とは，集合 W とその上の 2 項関係 $R \subseteq W \times W$ の組 $\mathbb{F} = (W, R)$ のことである．Kripke フレーム $\mathbb{F}_1 = (W_1, R_1), \mathbb{F}_2 = (W_2, R_2)$ の間の **bounded morphism** とは，写像 $f\colon W_1 \to W_2$ であって，

1. $\forall s_1, t_1 \in W_1[R_1 s_1 t_1 \to R_2 f(s_1) f(t_1)]$,
2. $\forall s_1 \in W_1 \forall t_2 \in W_2[R_2 f(s_1) t_2 \to \exists t_1 \in W_1[R_1 s_1 t_1 \wedge f(t_1) = t_2]]$

を満たすものである (図 1).

$$
\begin{tikzcd}
t_1 \arrow[r, mapsto] & f(t_1) \\
s_1 \arrow[u, "R_1"] \arrow[r, mapsto] & f(s_1) \arrow[u, dashed, "R_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
t_1 \arrow[r, mapsto, dashed] & t_2 \\
s_1 \arrow[u, dashed, "R_1"] \arrow[r, mapsto] & f(s_1) \arrow[u, "R_2"']
\end{tikzcd}
$$

図 1　bounded morphism

Kripke フレームを coalgebra の言葉で言い換えるため，coalgebra の定義をする．

定義 1.2 (T-coalgebra). C を圏，$T\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ を自己関手とする．**T-coalgebra** とは，C の対象 X と射

---

* 本稿は Category Theory Advent Calendar 2018 の 22 日目の記事です．

† `http://iso.2022.jp/`

$\xi\colon X \to TX$ の組 (X, ξ) のことである．T-coalgebras $(X_1, \xi_1), (X_2, \xi_2)$ の間の **T-coalgebra morphism** とは，射 $h\colon X_1 \to X_2$ であって，図式

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\xi_1} & TX_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Th} \\ X_2 & \xrightarrow{\xi_2} & TX_2 \end{array}$$

を可換にするものである．T-coalgebras と T-coalgebra morphisms のなす圏を $\mathsf{Coalg}(T)$ と書く．

この設定の下で，Kripke フレームは冪集合をとる関手 $\mathcal{P}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ に関する $\mathcal{P}$-coalgebras と同一視できる．

命題 1.3. Kripke フレームと bounded morphism のなす圏は $\mathsf{Coalg}(\mathcal{P})$ と圏同型である．

証明．Kripke フレーム $\mathbb{F} = (W, R)$ に対して写像 $R[-]\colon W \to \mathcal{P}(W)$ を

$$R[s] := \{\, t \in W \mid Rst \,\}$$

と定義すると，$(W, R[-])$ は $\mathcal{P}$-coalgebra である．$\mathbb{F}_1 = (W_1, R_1), \mathbb{F}_2 = (W_2, R_2)$ を Kripke フレームとする．射 $h\colon (W_1, R_1[-]) \to (W_2, R_2[-])$ が $\mathcal{P}$-coalgebra morphism であるのは，任意の $s_1 \in W_1$ に対し $\mathcal{P}(h) \circ R_1[-](s_1) = R_2[-] \circ h(s_1)$ が成り立つときである．両辺をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(h) \circ R_1[-](s_1) &= h(R_1[s_1]), \\ R_2[-] \circ h(s_1) &= R_2[h(s_1)] \end{aligned}$$

となる．このとき定義 1.1 の条件 1，2 はそれぞれ $h(R_1[s_1]) \subseteq R_2[h(s_1)], R_2[h(s_1)] \subseteq h(R_1[s_1])$ に対応する．

逆に，(X, ξ) を $\mathcal{P}$-coalgebra とするとき，X 上の二項関係 R を $Rst \;:\Longleftrightarrow\; t \in \xi(s)$ と定義すると (X, R) は Kripke フレームとなる．これは明らかに上の構成の逆を与えている． □

2 General frames as coalgebras

Kripke フレームの一般化として，general frame という概念がある．

定義 2.1 (general frame). **general frame** とは，Kripke フレーム $\mathbb{F} = (W, R)$ と W の部分集合族 $A \subseteq \mathcal{P}(W)$ で Boole 演算と写像 $\langle R\rangle\colon \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W); \langle R\rangle(X) := \{\, s \in W \mid \exists t \in X[Rst] \,\} = \{\, s \in W \mid R[s] \cap X \neq \emptyset \,\}$ で閉じているものの組 $\mathbb{G} = (W, R, A)$ のことである．A の元を $\mathbb{G}$ の **admissible subset** と呼ぶ．

1. $\mathbb{G}$ が **differentiated** であるとは，任意の相異なる $s, t \in W$ に対して，ある $a \in A$ が存在して $s \in a$ かつ $t \notin a$ となることである．
2. $\mathbb{G}$ が **tight** であるとは，$s, t \in W$ が $\neg Rst$ を満たすならば，ある $a \in A$ が存在して $t \in a$ かつ $s \notin \langle R\rangle a$ となることである．
3. $\mathbb{G}$ が **compact** であるとは，有限交叉性を持つ任意の $A_0 \subseteq A$ に対し $\bigcap A_0 \neq \emptyset$ となることである．
4. $\mathbb{G}$ が **descriptive** であるとは，$\mathbb{G}$ が differentiated かつ tight かつ compact であることである．

general frames $\mathbb{G}_1 = (W_1, R_1, A_1), \mathbb{G}_2 = (W_2, R_2, A_2)$ の間の **bounded morphism** とは，写像 $\theta\colon W_1 \to W_2$ であって，θ が Kripke フレーム $(W_1, R_1), (W_2, R_2)$ の間の bounded morphism であり，かつ任意の $a_2 \in A_2$ に対し $\theta^{-1}(a_2) \in A_1$ となるものである．

descriptive general frames とその間の bounded morphisms のなす圏を DGF と書く．

ここで，次のような疑問が自然に生ずる: Kripke フレームの場合と同様に，DGF を coalgebra とみなすことはできるか？ 言い換えると，$\mathsf{DGF} \cong \mathsf{Coalg}(T)$ となるような関手 T は存在するか？ この問に答えるため，Vietoris space の概念を導入する．

定義 2.2 (Stone space). $\mathbb{X} = (X, \tau)$ を位相空間とし，$\mathbb{X}$ の開閉集合全体を $\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ と書く．$\mathbb{X}$ が **Stone 空間** (Stone space) であるとは，$\mathbb{X}$ がコンパクト Hausdorff かつ $\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ が $\mathbb{X}$ の開基 (あるいは同じことだが，閉基) となることである．Stone 空間と連続写像のなす圏を Stone と書く．

定義 2.3 (Vietoris space). 位相空間 $\mathbb{X} = (X, \tau)$ の閉集合全体を $K(\mathbb{X})$ と書く．$U \subseteq X$ に対し，

$$[\ni]U := \{\, F \in K(\mathbb{X}) \mid F \subseteq U \,\},$$
$$\langle\ni\rangle U := \{\, F \in K(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \emptyset \,\}$$

と定める．$Q \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し，$V_Q := \{\, [\ni]U \mid U \in Q \,\} \cup \{\, \langle\ni\rangle U \mid U \in Q \,\}$ とおく．$\upsilon_{\mathbb{X}}$ を V_τ で生成される位相とする．$\mathbb{V}(\mathbb{X}) := (K(\mathbb{X}), \upsilon_{\mathbb{X}})$ とおき，$\mathbb{X}$ に付随する Vietoris space という．

Vietoris functor を導入するにあたり，必要な補題や定理を用意しておく．

補題 2.4. 位相空間 $\mathbb{X} = (X, \tau)$ に対し，次が成り立つ．

1. $U \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ ならば $[\ni]U, \langle\ni\rangle U \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{V}(\mathbb{X})}$.
2. $\mathbb{X}$ が Stone 空間ならば $V_{\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}}$ は $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ の準開基である．

証明.
1. 定義から $([\ni]U)^c = \langle\ni\rangle(U^c)$ であることに注意する．$U \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ ならば $U^c \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ なので $([\ni]U)^c = \langle\ni\rangle(U^c) \in V_{\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}}$ である．よって $[\ni]U$ は $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ の閉集合でもあるので $[\ni]U \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{V}(\mathbb{X})}$ となる．$\langle\ni\rangle U$ についても同様である．
2. $\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ が $\mathbb{X}$ の開基であることより，τ の任意の元は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ $(U_\lambda \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}})$ の形に書ける．まず，定義から $\langle\ni\rangle \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \langle\ni\rangle U_\lambda$ である．$\mathbb{X}$ がコンパクト Hausdorff であることより $K(\mathbb{X})$ は $\mathbb{X}$ のコンパクト部分集合全体に一致する．よって，Λ の有限集合全体を $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Lambda)$ と書くことにすれば

$$\begin{aligned}
[\ni] \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda &= \left\{ F \in K(\mathbb{X}) \;\middle|\; F \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \right\} \\
&= \left\{ F \in K(\mathbb{X}) \;\middle|\; \exists \Lambda_0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Lambda) \left[F \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda \right] \right\} \qquad (F \text{ のコンパクト性より}) \\
&= \bigcup_{\Lambda_0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Lambda)} \left\{ F \in K(\mathbb{X}) \;\middle|\; F \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda \right\} \\
&= \bigcup_{\Lambda_0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Lambda)} [\ni] \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda
\end{aligned}$$

となる．$\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ は有限個の和集合をとる操作で閉じているから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ である．以上より，$\upsilon_{\mathbb{X}}$ は $V_{\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}}$ で生成される位相である． □

定理 2.5 (Alexander's subbase lemma). $\mathbb{X}=(X,\tau)$ を位相空間，$\mathcal{B}$ を $\mathbb{X}$ の準開基とする．$\mathcal{B}$ の元からなる $\mathbb{X}$ の任意の開被覆が有限部分被覆を持つならば，$\mathbb{X}$ はコンパクトである．

証明. 背理法で示す．$\mathcal{B}$ の元からなる $\mathbb{X}$ の任意の開被覆が有限部分被覆を持ち，一方で $\mathbb{X}$ はコンパクトでないと仮定する．$\Sigma := \{\,\mathcal{U}\subseteq\tau \mid \mathcal{U}$ は $\mathbb{X}$ の開被覆で，有限部分被覆を持たない$\,\}$ とおく．$\mathbb{X}$ がコンパクトでないので $\Sigma\neq\emptyset$ である．Σ が包含関係に関して帰納的順序集合をなすことは容易に確かめられるから，Zorn の補題により Σ の極大元 $\mathcal{U}_0$ がとれる．$\mathcal{U}_0$ から準開基だけを取り出した集合 $\mathcal{U}_0\cap\mathcal{B}$ を考える．仮に $\mathcal{U}_0\cap\mathcal{B}$ が $\mathbb{X}$ の被覆だったとすると，仮定より $\mathcal{U}_0\cap\mathcal{B}$ が有限部分被覆を持つことになるが，これは $\mathcal{U}_0\in\Sigma$ に反する．よって $\mathcal{U}_0\cap\mathcal{B}$ は $\mathbb{X}$ の被覆ではないので，元 $x\in X\setminus\bigcup(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{B})$ がとれる．$\mathcal{U}_0$ は $\mathbb{X}$ を被覆しているから $x\in U\in\mathcal{U}_0$ なる開集合 U がある．$\mathcal{B}$ が $\mathbb{X}$ の準開基であることより $x\in S_1\cap\cdots\cap S_n\subseteq U$ なる有限個の開集合 $S_1,\dots,S_n\in\mathcal{B}$ がある．ここで x のとり方から，各 $i=1,\dots,n$ について $S_i\notin\mathcal{U}_0$ でなければならない．よって $\mathcal{U}_0$ の極大性から，各 $i=1,\dots,n$ に対して $\mathcal{U}_0\cup\{S_i\}$ は有限部分被覆 $\mathcal{U}_i\cup\{S_i\}$ $(\mathcal{U}_i\subseteq\mathcal{U}_0)$ を持つ．$\mathcal{V}:=\mathcal{U}_1\cup\cdots\cup\mathcal{U}_n$ とおく．各 $i=1,\dots,n$ に対して $\mathcal{V}\cup\{S_i\}\supseteq\mathcal{U}_i\cup\{S_i\}$ は $\mathbb{X}$ の有限開被覆である．よって $X=X\cap\cdots\cap X=\bigcup(\mathcal{V}\cup\{S_1\})\cap\cdots\cap\bigcup(\mathcal{V}\cup\{S_n\})=\bigcup(\mathcal{V}\cup\{S_1\cap\cdots\cap S_n\})$ であるので $\mathcal{V}\cup\{S_1\cap\cdots\cap S_n\}$ も，したがって $\mathcal{V}\cup\{U\}$ も $\mathbb{X}$ の有限開被覆である．ところがこのとき $\mathcal{V}\cup\{U\}\subseteq\mathcal{U}_0$ は有限部分被覆だから $\mathcal{U}_0\in\Sigma$ に矛盾する． □

命題 2.6. 位相空間 $\mathbb{X}=(X,\tau)$ が Stone 空間のとき，$\mathbb{V}(\mathbb{X})$ も Stone 空間である．言い換えると，$\mathbb{V}$ は $\mathbb{V}\colon \mathsf{Stone}\to\mathsf{Stone}$ なる関手である．$\mathbb{V}$ を **Vietoris functor** と呼ぶ．

証明. まず，$\mathbb{V}(\mathbb{X})$ のコンパクト性を示す．$K(\mathbb{X})$ の任意の開被覆をとる．Alexander's subbase lemma 2.5 より $\{\,[\ni]U_\lambda \mid U_\lambda\in\tau,\lambda\in\Lambda\,\}\cup\{\,\langle\ni\rangle V_\mu \mid V_\mu\in\tau,\mu\in\mathrm{M}\,\}$ という形をしているとしてよい．このとき $K(\mathbb{X})=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\ni]U_\lambda\cup\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}\langle\ni\rangle V_\mu$ だから，任意の $F\in K(\mathbb{X})$ に対して

$$\exists\lambda\in\Lambda[F\subseteq U_\lambda]\vee\exists\mu\in\mathrm{M}[F\cap V_\mu\neq\emptyset],$$

すなわち，

$$\forall\mu\in\mathrm{M}[F\cap V_\mu=\emptyset]\implies\exists\lambda\in\Lambda[F\subseteq U_\lambda]$$

となっている．よって $F:=X\setminus\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}V_\mu$ とおくと F は $\mathbb{X}$ の閉集合で，ある $\lambda_0\in\Lambda$ が存在して $F\subseteq U_{\lambda_0}$ となり，$\{U_{\lambda_0}\}\cup\{\,V_\mu \mid \mu\in\mathrm{M}\,\}$ は $\mathbb{X}$ の開被覆となる ($\Lambda=\emptyset$ のときは $U_{\lambda_0}=\emptyset$ としておく)．よって $\mathbb{X}$ のコンパクト性からある有限集合 $\mathrm{M}_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{M})$ が存在して $\{U_{\lambda_0}\}\cup\{\,V_\mu \mid \mu\in\mathrm{M}_0\,\}$ も $\mathbb{X}$ の開被覆になる．このとき $\{[\ni]U_{\lambda_0}\}\cup\{\,\langle\ni\rangle V_\mu \mid \mu\in\mathrm{M}_0\,\}$ は $K(\mathbb{X})$ の有限開被覆である．

次に $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ が Hausdorff 空間であることを示す．任意に相異なる閉集合 $F,F'\in K(\mathbb{X})$ をとる．$F\setminus F'\neq\emptyset$ として一般性を失わない．$x\in F\setminus F'$ をとる．一般に，コンパクト Hausdorff 空間は正則空間だから，ある $U,V\in\tau$ が存在して $x\in U, F'\subseteq V, U\cap V=\emptyset$ が成り立つ．よってこのとき $F\in\langle\ni\rangle U, F'\in[\ni]V, \langle\ni\rangle U\cap[\ni]V=\emptyset$ となる．

補題 2.4 より，$V_{\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}}\subseteq\mathsf{Clp}_{\mathbb{V}(\mathbb{X})}$ であり，しかも $v_{\mathbb{X}}$ は $V_{\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}}$ で生成されるので，$v_{\mathbb{X}}$ は $\mathsf{Clp}_{\mathbb{V}(\mathbb{X})}$ で生成される位相である．

以上より，$\mathbb{V}$ は Stone 空間を Stone 空間へ写す．すなわち，$\mathbb{V}$ は対象を対象へ写す．

$\mathbb{X}_1=(X_1,\tau_1),\mathbb{X}_2=(X_2,\tau_2)$ を Stone 空間，$f\colon\mathbb{X}_1\to\mathbb{X}_2$ を連続写像とする．Stone の射 $\mathbb{V}(f)$ を，f による順像と定める．コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像だから，$\mathbb{V}(f)$ は $K(\mathbb{X}_1)$ から

$K(\mathbb{X}_2)$ への写像である．$\mathbb{V}(f)\colon K(\mathbb{X}_1) \to K(\mathbb{X}_2)$ の連続性を示す．任意に開集合 $U \in \tau_2$ をとる．このとき，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(f)^{-1}([\ni]U) &= \{\, F \in K(\mathbb{X}_1) \mid \mathbb{V}(f)(F) \in [\ni]U \,\} \\
&= \{\, F \in K(\mathbb{X}_1) \mid f(F) \subseteq U \,\} \\
&= \{\, F \in K(\mathbb{X}_1) \mid F \subseteq f^{-1}(U) \,\} \\
&= [\ni]f^{-1}(U) \\
&\in \upsilon_{\mathbb{X}_1}, && (f\text{ の連続性より}) \\
\mathbb{V}(f)^{-1}(\langle\ni\rangle U) &= \{\, F \in K(\mathbb{X}_1) \mid \mathbb{V}(f)(F) \in \langle\ni\rangle U \,\} \\
&= \{\, F \in K(\mathbb{X}_1) \mid f(F) \cap U \neq \emptyset \,\} \\
&= \{\, F \in K(\mathbb{X}_1) \mid F \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset \,\} \\
&= \langle\ni\rangle f^{-1}(U) \\
&\in \upsilon_{\mathbb{X}_1} && (f\text{ の連続性より})
\end{aligned}
$$

となる．よって $\mathbb{V}$ は射を射へ写す．

$\mathbb{V}$ が恒等写像を恒等写像へ写すこと，合成を保つことは明らか． □

補題 2.7 (tightness の特徴付け). general frame $\mathbb{G} = (W, R, A)$ が tight ならば，任意の $s \in W$ に対し

$$R[s] = \bigcap_{R[s] \subseteq a \in A} a. \tag{1}$$

逆に，任意の $s \in W$ に対し式 (1) が成り立つ general frame は tight である．

証明. ($\subseteq$): 明らか.

($\supseteq$): $t \notin R[s]$ と仮定する．このとき $\neg Rst$ だから，$\mathbb{G}$ が tight であることよりある $a \in A$ が存在して $t \in a$ かつ $s \notin \langle R \rangle a$ となる．ここで $s \notin \langle R \rangle a$ という条件は $R[s] \cap a = \emptyset$ と同値である．よって $t \notin a^c, R[s] \subseteq a^c$ となるので $t \notin \bigcap_{R[s] \subseteq a \in A} a$ となる．

また，今の議論を逆に辿れば逆が成り立つこともわかる． □

定理 2.8. $\mathsf{DGF} \cong \mathsf{Coalg}(\mathbb{V})$.

証明. general frame $\mathbb{G} = (W, R, A)$ に対し，A を開基とする W 上の位相を σ_A と書く．$\mathbb{V}$-coalgebra $(\mathbb{X}, \gamma\colon \mathbb{X} \to \mathbb{V}(\mathbb{X}))$ に対し，$R_\gamma st \quad :\Longleftrightarrow \quad t \in \gamma(s)$ と定める．この記法の下で，関手 $\mathbb{C}\colon \mathsf{DGF} \to \mathsf{Coalg}(\mathbb{V}), \mathbb{D}\colon \mathsf{Coalg}(\mathbb{V}) \to \mathsf{DGF}$ を次のように定める．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}(W, R, A) &:= ((W, \sigma_A), R[-]\colon (W, \sigma_A) \to \mathbb{V}(W, \sigma_A)), \\
\mathbb{D}(\mathbb{X}, \gamma) &:= (X, R_\gamma, \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}).
\end{aligned}
$$

ただし，$\mathbb{C}, \mathbb{D}$ はどちらも射は写像として変えないものとする．$\mathbb{C}, \mathbb{D}$ が実際に関手になっていることを示そう．

$\mathbb{C}$ の関手性: まず，(W, σ_A) が Stone 空間であることを示す．$\mathbb{G} = (W, R, A)$ が general frame として compact であることより (W, σ_A) は位相空間としてコンパクトである．$\mathbb{G}$ が differentiated であることより (W, σ_A) は T_1 空間であり，さらに A が Boole 演算で閉じていることより (W, σ_A) は Hausdorff である．A が Boole 演算で閉じていることより (W, σ_A) は開閉集合族 A を開基に持つ．

次に，$R[-]\colon (W, \sigma_A) \to \mathbb{V}(W, \sigma_A)$ が Stone の射であることを示す．補題 2.7 より $R[-]$ は W から $K(W, \sigma_A)$ への写像である．任意に開集合 $U \in \sigma_A$ をとる．$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ $(a_\lambda \in A)$ と書ける．この

とき

$$\begin{aligned}
R[-]^{-1}([\ni]U) &= \{\, s \in W \mid R[s] \in [\ni]U \,\} \\
&= \{\, s \in W \mid R[s] \subseteq U \,\} \\
&= \left\{\, s \in W \;\middle|\; R[s] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \,\right\}
\end{aligned}$$

補題 2.7 より $R[s]$ は閉であり，(W, σ_A) はコンパクトだから $R[s]$ もコンパクトなので

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{\Lambda_0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Lambda)} \left\{\, s \in W \;\middle|\; R[s] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} a_\lambda \,\right\} \\
&= \bigcup_{\Lambda_0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Lambda)} \left(\langle R \rangle \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} a_\lambda^c \right) \right)^c
\end{aligned}$$

A は有限 Boole 演算と $\langle R \rangle$ で閉じているので

$$\begin{aligned}
&\in \sigma_A, \\
R[-]^{-1}(\langle \ni \rangle U) &= \{\, s \in W \mid R[s] \in \langle \ni \rangle U \,\} \\
&= \{\, s \in W \mid R[s] \cap U \neq \emptyset \,\} \\
&= \langle R \rangle U \\
&= \langle R \rangle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \\
&= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \langle R \rangle a_\lambda \\
&\in \sigma_A
\end{aligned}$$

となるから $R[-]$ は連続である．

以上より，$\mathbb{C}(\mathbb{G})$ は $\mathbb{V}$-coalgebra である．すなわち，$\mathbb{C}$ は対象を対象へ写す．

次に, $\mathbb{G}_1 = (W_1, R_1, A_1), \mathbb{G}_2 = (W_2, R_2, A_2)$ を descriptive general frames とし, $\theta \colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ を DGF の射とする．このとき $\mathbb{C}(\theta) \colon (W_1, \sigma_{A_1}) \to (W_2, \sigma_{A_2})$ は，θ が任意の $a_2 \in A_2$ に対し $\theta^{-1}(a_2) \in A_1$ を満たすことより連続である．また，$\mathbb{C}(\theta)$ が $\mathbb{V}$-coalgebra morphism であること (図式の可換性) の証明は，θ が Kripke フレームの間の bounded morphism であることを用いて $\mathcal{P}$-coalgebra の場合と同様にすればよい．よって $\mathbb{C}$ は射を射に写す．

$\mathbb{C}$ が恒等射を恒等射に写すこと，合成を保つことは明らか．

$\mathbb{D}$ の関手性: まず，$(X, R_\gamma, \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}})$ が general frame であることを示す．$\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ が Boole 演算で閉じていることは明らか．$\langle R_\gamma \rangle$ で閉じていることは，$U \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ に対し

$$\begin{aligned}
\langle R_\gamma \rangle U &= \{\, s \in X \mid R_\gamma[s] \cap U \neq \emptyset \,\} \\
&= \{\, s \in X \mid \gamma(s) \cap U \neq \emptyset \,\} \\
&= \{\, s \in X \mid \gamma(s) \in \langle \ni \rangle U \,\} \\
&= \gamma^{-1}(\langle \ni \rangle U) \\
&\in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}} && (\gamma \text{ の連続性と補題 2.4 より})
\end{aligned}$$

となることからわかる．

次に，$(X, R_\gamma, \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}})$ が descriptive であることを示す．$\mathbb{X}$ が Hausdorff であり，かつ開閉集合からなる開基を持つことより $(X, R_\gamma, \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}})$ は differentiated である．任意の $s \in X$ に対し $R_\gamma[s] = \gamma(s) \in K(\mathbb{X})$ は閉集合だから，$\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ が $\mathbb{X}$ の閉基であることより $\gamma(s) = \bigcap_{\gamma(s) \subseteq U \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}} U$ となるので，補題 2.7 より $(X, R_\gamma, \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}})$ は tight である．$\mathbb{X}$ が位相空間としてコンパクトであることより $(X, R_\gamma, \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}})$ は general frame として compact である．

以上より，$\mathbb{D}(\mathbb{X}, \gamma)$ は descriptive general frame である．すなわち，$\mathbb{D}$ は対象を対象へ写す．

次に，$(\mathbb{X}_1, \gamma_1), (\mathbb{X}_2, \gamma_2)$ を $\mathbb{V}$-coalgebras とし，$f\colon (\mathbb{X}_1, \gamma_1) \to (\mathbb{X}_2, \gamma_2)$ を $\mathsf{Coalg}(\mathbb{V})$ の射とする．すなわち，$\mathbb{V}(f) \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ f$ が成り立っているとする．$R_{\gamma_1} s_1 t_1$ なる $s_1, t_1 \in X_1$ を任意にとる．このとき $t_1 \in \gamma_1(s_1)$ だから $f(t_1) \in f(\gamma_1(s_1)) = \gamma_2(f(s_1))$，すなわち $R_{\gamma_2} f(s_1) f(t_1)$ となる．次に $s_1 \in X_1$ と $R_{\gamma_2} f(s_1) t_2$ なる $t_2 \in X_2$ を任意にとる．このとき $t_2 \in \gamma_2(f(s_1)) = f(\gamma_1(s_1))$ だから，ある $t_1 \in \gamma_1(s_1)$ が存在して $t_2 = f(t_1), R_{\gamma_1} s_1 t_1$ となる．さらに，f の連続性から任意の $a_2 \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}_2}$ に対し $f^{-1}(a_2) \in \mathsf{Clp}_{\mathbb{X}_1}$ となる．よって $\mathbb{D}(f)$ は general frames の間の bounded morphism であり，$\mathbb{D}$ は射を射に写す．

$\mathbb{D}$ が恒等射を恒等射に写すこと，合成を保つことは明らか．

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ が互いに逆になっていることを示す．(W, R, A) を descriptive general frame とする．開閉集合 $\mathcal{U} \in \sigma_A$ を任意にとると，$\mathcal{U} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ $(a_\lambda \in A)$ と書ける．(W, σ_A) のコンパクト性より閉集合 $\mathcal{U}$ もコンパクトだからある $\Lambda_0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Lambda)$ が存在して $\mathcal{U} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} a_\lambda \in A$ となる．よって $\mathsf{Clp}_{(W, \sigma_A)} = A$ だから $\mathbb{D}(\mathbb{C}(W, R, A)) = (W, R, A)$ となる．次に，$(\mathbb{X}, \gamma)$ を $\mathbb{V}$-coalgebra とすると，$\mathbb{X}$ が Stone 空間であることより $\mathsf{Clp}_{\mathbb{X}}$ が $\mathbb{X}$ の開基を与えるので $\mathbb{C}(\mathbb{D}(\mathbb{X}, \gamma)) = (\mathbb{X}, \gamma)$ となる．$\mathbb{C}, \mathbb{D}$ が hom 集合の間の逆写像を与えていることは定義から明らか． □

参考文献

[KKV04] C. Kupke, A. Kurz, Y. Venema, Stone coalgebras, *Theor. Comput. Sci.* **327** (2004) 109–134, `https://doi.org/10.1016/J.TCS.2004.07.023`.

[BdRV01] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

変更履歴

2018/12/30　公開
2019/01/31　微修正