独立命題かどうかが独立な命題について
On Sentences whose Independence is Independent

y.*

2019 年 5 月 24 日

最終更新日: 2019 年 5 月 24 日

概要

Gödel の不完全性定理により，ZFC や PA において証明も反証もできないような文が存在することはよく知られている．本稿では，PA の Σ_1 健全な計算可能拡大 T に対して，T の Gödel 文 G_T が「T から独立かどうかが独立な文」の具体例となっていることを確かめる．また G_T が同様にして「「T から独立かどうかが独立」かどうかが独立な文」のような "高階の" 独立命題になっていることも示す．

1　前提知識 (Preliminaries)

まず結果を述べるにあたって必要となる定義や事実を列挙しておく．詳細については [1] などの基本的な教科書や，拙著 [2] などを参照のこと．

以下，記号列の相等を $\equiv$ で表す．論理式は全て算術の言語 $\{0, \mathtt{s}, +, \times, <\}$ で考えるものとする．Σ_1 論理式とは，原子論理式 $\bot$，$t = u$，$t < u$ またはその否定から $\land$，$\lor$，$\exists x$ と**有界量化記号** (bounded quantifier) $(\forall x < t)$ を用いて組み立てられた論理式のことをいう．自由変数を持たない論理式を**文** (sentence) と呼ぶ．論理式を自然数 (Gödel 数) にエンコードする方法を一つ固定しておく．論理式 φ の Gödel 数を $\ulcorner \varphi \urcorner$ で表し，自然数 n の**数字** (numeral) を $\overline{n} \equiv \overbrace{\mathtt{s} \cdots \mathtt{s}}^{n} 0$ で表す．

文の集合を**理論** (theory) と呼ぶ．Peano 算術の理論を PA と書く．理論 T が Σ_1 完全であるとは，標準モデル $\mathbb{N}$ で正しい Σ_1 文が全て T から証明されることをいう．PA は Σ_1 完全である．理論 T が Σ_1 健全であるとは，T から証明される Σ_1 文が全て標準モデル $\mathbb{N}$ で正しくなることをいう．$\bot$ は Σ_1 文なので，Σ_1 健全性は無矛盾性を導く．PA の全ての文は $\mathbb{N}$ で正しいので PA は Σ_1 健全である．T から φ が証明可能であることを $T \vdash \varphi$ で表し，φ が $\mathbb{N}$ で正しいことを $\mathbb{N} \models \varphi$ で表す．

理論 T が計算可能であるとは，自然数の集合 $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in T\}$ の特性関数 $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ が計算可能関数であることをいう．計算可能な理論 T に対し，証明可能性述語と呼ばれる Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．$\mathrm{Pr}_T(x)$ は任意の論理式 φ について $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \iff T \vdash \varphi$ を満たす．T の無矛盾性を表す文を $\mathrm{Con}(T) \equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \bot \urcorner})$ で表す．

以降，$\mathrm{Pr}_T(x)$ は導出可能性条件と呼ばれる以下の条件を満たすとする．

定義 1.1 (導出可能性条件, derivability conditions).　導出可能性条件とは次の 3 条件のことをいう．

* `http://iso.2022.jp/`

(D1) $T \vdash \varphi \implies T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.
(D2) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner}) \to (\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}))$.
(D3) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \urcorner})$.

導出可能性条件から次が導かれる．

補題 1.2. $T \vdash \varphi \to \psi \implies T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.

証明. $T \vdash \varphi \to \psi$ とすると (D1) より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner})$ だから (D2) と合わせて結論を得る． □

Gödel の不完全性定理は次の 2 つの定理からなる．

定理 1.3 (第一不完全性定理, first incompleteness theorem). PA の無矛盾な任意の計算可能拡大 T に対し，ある文 G_T が存在して

$$T \nvdash G_T, \quad T \nvdash \neg G_T$$

が成り立つ．この文 G_T を T の **Gödel 文** (Gödel sentence) と呼ぶ．

定理 1.4 (第二不完全性定理, second incompleteness theorem). PA の無矛盾な任意の計算可能拡大 T に対して

$$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$$

が成り立つ．

第一不完全性定理の証明に用いられる対角化補題を用いると次の Löb の定理も証明することができる．

定理 1.5 (Löb の定理). PA の任意の計算可能拡大 T と任意の文 φ について

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \varphi \implies T \vdash \varphi$$

が成り立つ．

2 主結果 (Main Result)

本稿では文の理論からの独立性を次のように形式化する．

定義 2.1. Gödel 数が x であるような論理式の理論 T からの独立性を表す論理式 $\mathrm{Indep}_T(x)$ を

$$\mathrm{Indep}_T(x) \equiv \neg \mathrm{Pr}_T(x) \wedge \neg \mathrm{Pr}_T(\mathrm{Not}(x))$$

と定める．ここで $\mathrm{Not}(x)$ は任意の文 φ に対して $\mathrm{Not}(\ulcorner \varphi \urcorner) = \ulcorner \neg\varphi \urcorner$ となるような原始再帰的関数である．

2.1 T からの独立性の独立性

補題 2.2. PA の無矛盾な任意の計算可能拡大 T と任意の文 φ に対して

$$T \nvdash \mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}).$$

証明．仮に $T \vdash \mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ であったとすると特に $T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ であるが，一方で補題 1.2 より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ だから $T \vdash \mathrm{Con}(T)$ となって第二不完全性定理 1.4 に矛盾する． □

定理 2.3 (独立性が独立な文)． PA の Σ_1 健全な任意の計算可能拡大 T に対し，ある文 φ が存在して

$$T \nvdash \mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}), \quad T \nvdash \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

が成り立つ．

証明．第一不完全性定理 1.3 の Gödel 文 G_T をとる．G_T が定理の主張を満たすことを示す．補題 2.2 より $T \nvdash \mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner G_T\urcorner})$ が成り立つ．$T \vdash \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner G_T\urcorner})$ と仮定すると $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G_T\urcorner}) \vee \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\neg G_T\urcorner})$ である．よって T の Σ_1 健全性より $T \vdash G_T$ または $T \vdash \neg G_T$ のいずれかが成り立つが，いずれにせよ G_T が T から独立であることに矛盾する． □

上の定理 2.3 では T が Σ_1 健全であると仮定したが，この仮定を無矛盾に弱めることはできない．

命題 2.4． 以下が成り立つ．

(a) PA の計算可能拡大 T が $T \vdash \neg\mathrm{Con}(T)$ を満たせば，任意の文 φ に対し $T \vdash \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ となる．したがって $\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ の形のいかなる文も T から独立にはならない．

(b) $T = \mathsf{PA} + \neg\mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ は PA の無矛盾な計算可能拡大であって (a) を満たす．さらに，この T は Σ_1 健全ではない．

証明． (a) $T \vdash \neg\mathrm{Con}(T)$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner})$ であるので，補題 1.2 より任意の文 φ に対し $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ となるから特に $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \vee \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\neg\varphi\urcorner})$ であり，よって $T \vdash \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ である．

(b) 矛盾する理論の拡大も当然矛盾するので

$$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(\mathsf{PA}) \tag{$*$}$$

であることに注意する．仮に T が矛盾したとすると演繹定理より $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Con}(T) \to \bot$ だから $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T)$ となり，$(*)$ と合わせると $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ となって第二不完全性定理 1.4 に反する．よって T は無矛盾である．また $T \vdash \neg\mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ と $(*)$ より $T \vdash \neg\mathrm{Con}(T)$ である．最後に，$\neg\mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ は正しくない Σ_1 文だが T から証明されるので T は Σ_1 健全ではない． □

次に，「「「T からの独立かどうか」が独立かどうか」が独立な文」などのような “高階の” 独立命題について考察する．

定義 2.5 (高階の独立性)． T からの n 階の独立性を表す文 $\mathrm{Indep}^n_T(\varphi)$ を帰納的に

$$\begin{aligned} \mathrm{Indep}^0_T(\varphi) &\equiv \varphi, \\ \mathrm{Indep}^{n+1}_T(\varphi) &\equiv \mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\mathrm{Indep}^n_T(\varphi)\urcorner}) \end{aligned}$$

と定義する．この定義のもとで $\mathrm{Indep}^1_T(\varphi) \equiv \mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ である．

系 2.6 (高階独立命題の存在)． 任意の自然数 n と PA の無矛盾な任意の計算可能拡大 T に対し，ある文 φ が存在して

$$T \nvdash \mathrm{Indep}^n_T(\varphi), \quad T \nvdash \neg\mathrm{Indep}^n_T(\varphi)$$

が成り立つ．

証明．ここでも T の Gödel 文 G_T が条件を満たすことを示す．n に関する帰納法によって証明する．$n=0,1$ はそれぞれ第一不完全性定理 1.3 と定理 2.3 そのものである．n まで証明できたとする．補題 2.2 より $T \nvdash \mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\mathrm{Indep}^n_T(G_T)} \urcorner)$，すなわち $T \nvdash \mathrm{Indep}^{n+1}_T(G_T)$ が成り立つ．次に $T \vdash \neg\mathrm{Indep}^{n+1}_T(G_T)$ と仮定すると $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \overline{\mathrm{Indep}^n_T(G_T)} \urcorner) \lor \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \overline{\neg\mathrm{Indep}^n_T(G_T)} \urcorner)$ が成り立つ．よって T の Σ_1 健全性より $T \vdash \mathrm{Indep}^n_T(G_T)$ または $T \vdash \neg\mathrm{Indep}^n_T(G_T)$ が成り立つが，一方で帰納法の仮定から $\mathrm{Indep}^n_T(G_T)$ は T から独立であるので矛盾が生じる． □

2.2　$T+\mathrm{Con}(T)$ からの独立性の独立性

定理 2.3 では T からの独立性 $\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)$ が独立になるような φ として Gödel 文 G_T がとれることを見た．しかし補題 2.2 が示す通り，第二不完全性定理 1.4 が成り立つためにいかなる文の独立性も T から証明することはできない．では，集合論における有名な事実，例えば「連続体仮説 CH が ZFC から独立である」などの結果は誤りなのかといえば勿論そうではなく，実際には $\mathsf{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Indep}_{\mathsf{ZFC}}(\ulcorner \overline{\mathrm{CH}} \urcorner)$ という形で**相対的無矛盾性** (relative consistency) を証明しているので問題ないわけである．これを踏まえると，「T からの独立性が独立」ということを考察する際には $\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)$ の T からの独立性ではなく，むしろ $T+\mathrm{Con}(T)$ からの独立性を考えるのが適切ではないかと考えられる．

定理 2.7.　PA の Σ_1 健全な任意の計算可能拡大 T に対し，ある文 φ が存在して

$$T+\mathrm{Con}(T) \nvdash \mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner), \quad T+\mathrm{Con}(T) \nvdash \neg\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)$$

が成り立つ．

以下の証明の後半は倉橋太志さんから教えていただいたものである．

証明．$\mathrm{Con}(T)$ が定理の主張を満たすことを示す．

一般に，φ が T から独立であれば $T+\mathrm{Con}(T) \nvdash \neg\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)$ が成り立つ．実際，もし $T+\mathrm{Con}(T) \vdash \neg\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)$ だったとすると $T+\mathrm{Con}(T)$ の Σ_1 健全性より $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ となるが，いずれにせよ φ が T から独立であることに矛盾する．よって特に $T+\mathrm{Con}(T) \nvdash \neg\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\mathrm{Con}(T)} \urcorner)$ である．

次に，$T+\mathrm{Con}(T) \vdash \mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\mathrm{Con}(T)} \urcorner)$ と仮定すると演繹定理より $T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \overline{\neg\mathrm{Con}(T)} \urcorner)$ だから $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \overline{\neg\mathrm{Con}(T)} \urcorner) \to \neg\mathrm{Con}(T)$ が成り立つ．よって Löb の定理 1.5 より $T \vdash \neg\mathrm{Con}(T)$ となるが，T は無矛盾だったのでこれは T の Σ_1 健全性に反する． □

次に，高階の独立性を $T+\mathrm{Con}(T)$ の場合についても考える．

補題 2.8.　任意の文 φ と自然数 n に対して以下が成り立つ．

(a) $T \vdash \neg\mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)$.
(b) $T \vdash \neg\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner) \to \neg\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\mathrm{Indep}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)} \urcorner)$.
(c) $T \vdash \neg\mathrm{Indep}^{n+1}_T(\varphi) \to \neg\mathrm{Indep}^{n+2}_T(\varphi)$.
(d) $T \vdash \neg\mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))$.

証明.　(a) 補題 1.2 より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \overline{\bot} \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner)$ となるのでよい．

(b) 主張を書き換えると

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \lor \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\neg\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner}) \lor \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner})$$

であるから

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner}), \tag{1a}$$

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\neg\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner}) \tag{1b}$$

の 2 つを示せば十分である．(D3) より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner})$ である．$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ に補題 1.2 を用いると $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner})$ がわかるので，合わせると (1a) を得る．(1b) についても同様である．

(c) (b) の φ を $\mathrm{Indep}^n_T(\varphi)$ で置き換えればよい．

(d) (a) と (c) より明らか． □

定理 2.9. 任意の自然数 $n \geq 1$ と PA の無矛盾な任意の計算可能拡大 T に対し，ある文 φ が存在して

$$T + \mathrm{Con}(T) \nvdash \mathrm{Indep}^n_T(\varphi), \quad T + \mathrm{Con}(T) \nvdash \neg\mathrm{Indep}^n_T(\varphi)$$

が成り立つ．

証明. $\mathrm{Con}(T)$ が定理の主張を満たすことを n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは定理 2.7 そのものである．n まで正しいと仮定する．$T + \mathrm{Con}(T) \vdash \neg\mathrm{Indep}^{n+1}_T(\mathrm{Con}(T))$ と仮定すると $T + \mathrm{Con}(T) \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))\urcorner}) \lor \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))\urcorner})$ だから $T + \mathrm{Con}(T)$ の Σ_1 健全性から $T + \mathrm{Con}(T) \vdash \mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))$ または $T + \mathrm{Con}(T) \vdash \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))$ が成り立つが，これは帰納法の仮定に反する．次に $T + \mathrm{Con}(T) \vdash \mathrm{Indep}^{n+1}_T(\mathrm{Con}(T))$ と仮定すると演繹定理より $T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))\urcorner})$ だから対偶を取って $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))\urcorner}) \to \neg\mathrm{Con}(T)$ を得る．よって補題 2.8 の (d) と合わせて $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))\urcorner}) \to \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))$ を得，さらに Löb の定理 1.5 より $T \vdash \neg\mathrm{Indep}^n_T(\mathrm{Con}(T))$ となるが，これは帰納法の仮定に反する． □

参考文献

[1] 鹿島亮. 第一不完全性定理と第二不完全性定理. 田中一之 (編). ゲーデルと 20 世紀の論理学(ロジック) ③ 不完全性定理と算術の体系. pp. 37–113, 東京大学出版会, 2007.

[2] y., Gödel の不完全性定理, `http://iso.2022.jp/math/TS2016/resume.pdf`, 2016.

変更履歴

2019/05/24　公開

2019/05/24　倉橋太志さんの指摘を基に定理 2.7 の証明を追記

2019/05/24　$T + \mathrm{Con}(T)$ からの高階の独立性や導出可能性条件について加筆