非単項超フィルターが Baire の性質を持たないこと

y. *

2019 年 12 月 21 日

最終更新日: 2019 年 12 月 21 日

概要

ω 上のフィルター $\mathcal{U}$ は自然に Cantor 空間 2^ω の部分集合とみなすことができる．本稿では ω 上の非単項超フィルター $\mathcal{U}$ が Cantor 空間 2^ω の通常の位相の下で Baire の性質を持たないことを証明する．

定義 1 (疎集合，痩集合). X を位相空間とする．

- X の部分集合 $N \subseteq X$ が**疎** (nowhere dense) であるとは，その閉包が内点を持たないこと，すなわち $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(N)) = \emptyset$ となることをいう．
- X の部分集合 $M \subseteq X$ が**痩集合** (meager set) であるとは，M が疎集合の可算和で表されることをいう．部分集合 $C \subseteq X$ が**補痩集合** (comeager set) であるとは，補集合 $2^\omega - C$ が痩集合であることをいう．

X の痩集合全体を $\mathcal{M}$ で表す．

定理 2 (Baire の範疇定理 (Baire category theroem)). 完備距離空間 X において，X の空でない任意の開集合は痩集合ではない．特に，任意の痩集合 $M \subseteq X$ に対し，$M \neq X$ が成り立つ．[*1]

Cantor 空間 2^ω は完備距離空間なので Baire の範疇定理 2 が成り立つ．

定義 3 (Baire の性質). X を位相空間とする．部分集合 $B \subseteq X$ が **Baire の性質** (property of Baire) を持つ，または**ほとんど開** (almost open) な集合であるとは，ある開集合 $U \subseteq X$ が存在して $B \mathbin{\triangle} U \in \mathcal{M}$ となることをいう (ここで $B \mathbin{\triangle} U := (B - U) \cup (U - B)$ は対称差)．

定義 4 (末尾集合). 自然数の集合 $A, B \subseteq \omega$ に対し，

- $A \subseteq^* B \ :\iff\ |A - B| < \infty$,
- $A =^* B \ :\iff\ |A \mathbin{\triangle} B| < \infty \quad (\iff\ A \subseteq^* B \subseteq^* A)$

と定義する．$\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ が**末尾集合** (tail set) であるとは，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し，

$$A =^* B \implies [A \in \mathcal{A} \iff B \in \mathcal{A}]$$

をみたすときをいう．

---

* `http://iso.2022.jp`

*1 完備距離空間における Baire の範疇定理は ZF で示すことができる．

Cantor 空間 2^ω の開基は有限列 $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し

$$[\![\sigma]\!] := \{\, f \in 2^\omega \mid \sigma \prec f \,\}$$

という形で与えられる．

補題 5 (位相的 0-1 法則, cf. [Kec95, (8.47) Theorem], [Fuj09, §3]). $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ を Baire の性質を持つ末尾集合とする．このとき，$\mathcal{A}$ は痩集合または補痩集合である．

証明. $\mathcal{A}$ が痩集合でないと仮定し，$\mathcal{A}$ が補痩集合となることを示す．$\mathcal{A}$ が Baire の性質を持つことより，ある開集合 $\mathcal{O} \subseteq 2^\omega$ が存在して $\mathcal{A} \triangle \mathcal{O}$ が痩集合，よって特に $\mathcal{O} - \mathcal{A}$ が痩集合となる．$\mathcal{A}$ が痩集合でないことから $\mathcal{O} \neq \emptyset$ である．よってある $\sigma \in 2^{<\omega}$ が存在して $[\![\sigma]\!] \subseteq \mathcal{O}$ となるので $[\![\sigma]\!] - \mathcal{A}$ は痩集合である．ここで写像 $\varphi_\sigma \colon 2^\omega \to [\![\sigma]\!]$ を

$$\varphi_\sigma(f) := (\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(|\sigma| - 1), f(|\sigma|), f(|\sigma| + 1), \ldots)$$

と定める (ここで $|\sigma|$ は σ の長さ)．φ_σ は与えられた f の手前の部分を σ に書き換える写像である．φ_σ は局所同相かつ $2^{|\sigma|}$ 対 1 の写像である (図 1)．

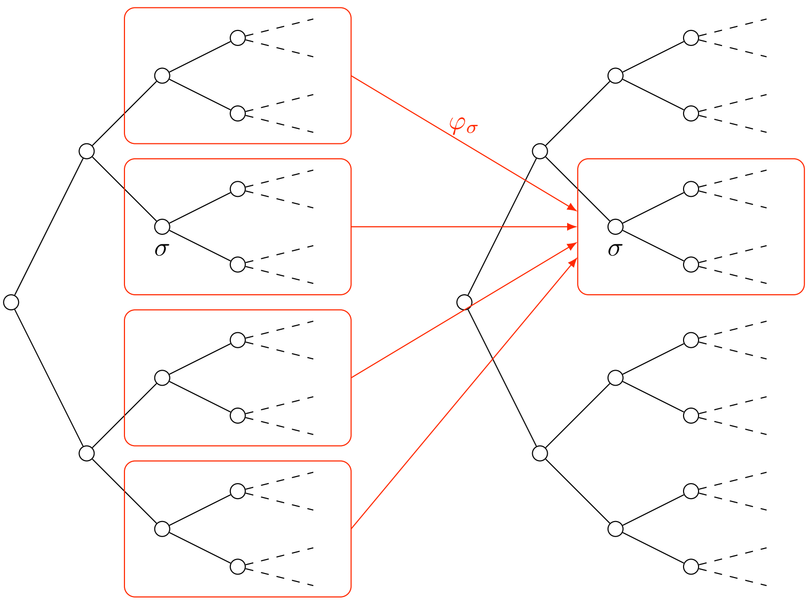

図 1　φ_σ は局所同相な $2^{|\sigma|} : 1$ 写像である

したがって，$\varphi_\sigma^{-1}([\![\sigma]\!] - \mathcal{A})$ も ($[\![\sigma]\!] - \mathcal{A}$ の $2^{|\sigma|}$ 個のコピーの和なので) 痩集合であり，さらに $\mathcal{A}$ が末尾集合であることより $f \in \mathcal{A} \iff \varphi_\sigma(f) \in \mathcal{A}$ なので

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{-1}([\![\sigma]\!] - \mathcal{A}) &= \{\, f \in 2^\omega \mid \varphi_\sigma(f) \in [\![\sigma]\!], \varphi_\sigma(f) \notin \mathcal{A} \,\} \\
&= \{\, f \in 2^\omega \mid \varphi_\sigma(f) \in [\![\sigma]\!], f \notin \mathcal{A} \,\} \\
&= \varphi_\sigma^{-1}([\![\sigma]\!]) - \mathcal{A} \\
&= 2^\omega - \mathcal{A}
\end{aligned}$$

となるから $\mathcal{A}$ は補痩集合である．　□

定理 6 (cf. [Kec95, (8.50) Exercise]). $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ を ω 上の非単項超フィルターとすると，$\mathcal{U}$ は Baire の性質を持たない．

証明． まず，$\mathcal{U}$ が末尾集合であることを示す．$\mathcal{U}$ が非単項超フィルターであることより $\mathcal{U}$ は有限集合を含まず，全ての補有限集合を含む．よって $A \in \mathcal{U}$ かつ $A =^* B$ のとき，$A - B$ は有限だから $2^\omega - (A - B) \in \mathcal{U}$ なのでフィルターの性質から $A \cap B = A \cap (2^\omega - (A - B)) \in \mathcal{U}$，$B = (A \cap B) \cup (B - A) \in \mathcal{U}$ となる．

次に，$\mathcal{U}$ が痩集合でも補痩集合でもないことを示す．補集合をとる写像 $c\colon 2^\omega \to 2^\omega; c(A) = 2^\omega - A$ は自己同相写像であり，$\mathcal{U}$ が超フィルターであることから Cantor 空間は $2^\omega = \mathcal{U} \sqcup c(\mathcal{U})$ と分割される．c が同相写像であることより，$\mathcal{U}$ が (補) 痩集合であることと $c(\mathcal{U})$ が (補) 痩集合であることは同値である．Baire の範疇定理から 2^ω 自身は痩集合ではないので，$\mathcal{U}$ は痩集合でも補痩集合でもありえない．

したがって補題 5 より $\mathcal{U}$ は Baire の性質を持たない． □

参考文献

[Fuj09] 藤田博司 (2009), 選択公理を制限した数学における数列空間 ℓ^1 の回帰性および関連する話題, `http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~fujita/preprints/090407a.pdf`.

[Kec95] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, GTM **156**, Springer, 1995.

変更履歴

2019/12/21 公開