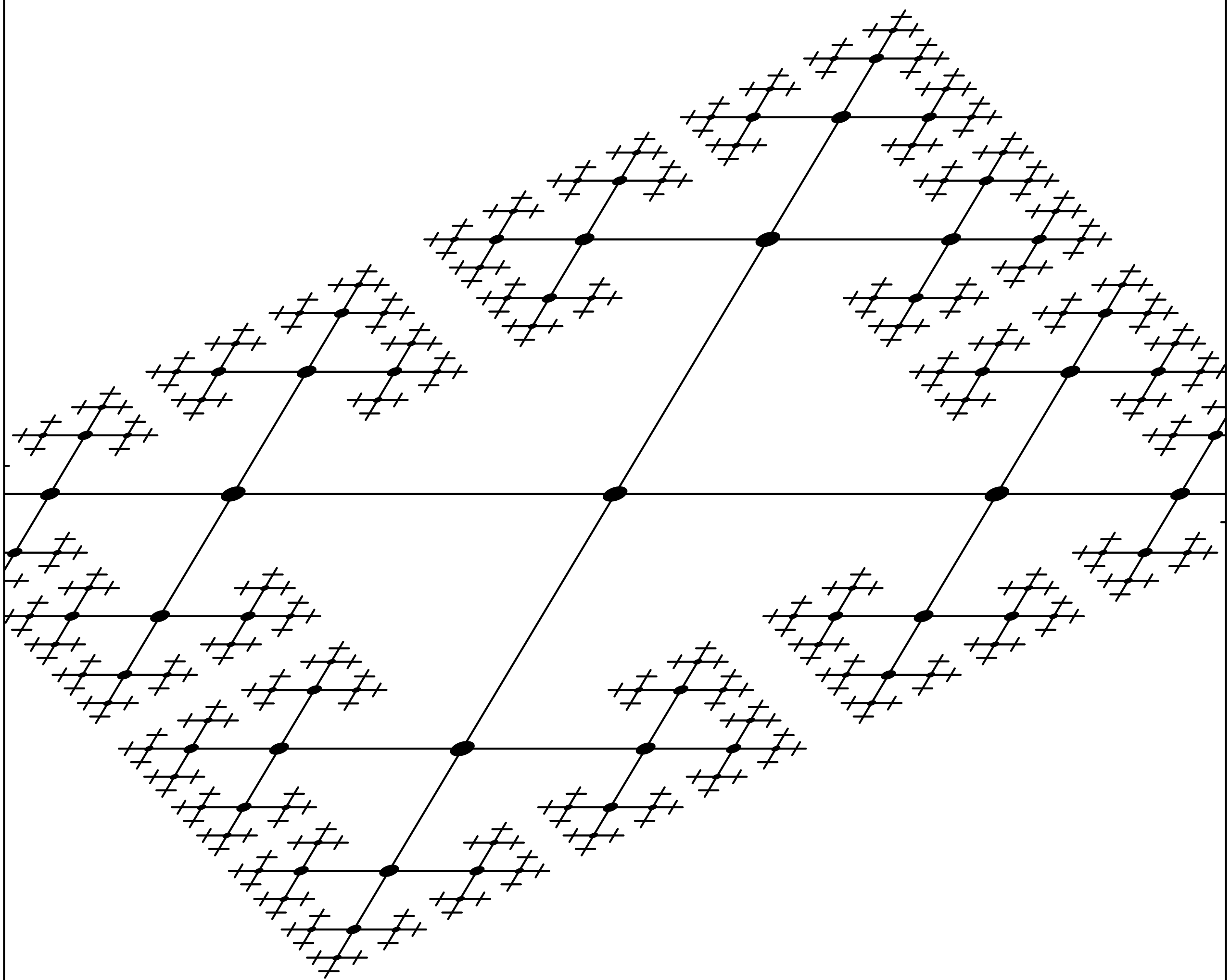
Muller–Schupp の定理: 群・形式言語・グラフ

Muller–Schupp theorem: groups, languages, and graphs



y. (http://iso.2022.jp)

2022 年 M 月 D 日

最終更新日: 2022 年 6 月 5 日

はじめに

Muller–Schupp の定理は数学における群論と形式言語理論という 2 つの分野に関係する定理であり，有限生成群 G に対して，次の 2 条件が同値であることを主張するものである．

(1) G が**実質的自由群** (virtually free group) である．つまり G の部分群で，自由群であってしかも群指数が有限であるようなものが存在する．
(2) G の語の問題が**文脈自由言語** (context-free language) である．つまり，G の生成系 Σ をひとつ固定したとき，Σ の元の有限列であって G の中で単位元を表すようなもの全体の集合が，ある**文脈自由文法** (context-free grammar) によって生成される．

ここで条件 (1) は純粋に群論的な条件であり，条件 (2) は形式言語理論的な条件である．両者に含まれる「自由 (free)」という単語は互いにまったく異なる由来を持つので，これらが同値となることは決して当たり前のことではない．本稿では Muller–Schupp の定理の主張に現れる「実質的自由群」「語の問題」「文脈自由言語」などの用語の定義を例とともに解説し，Muller–Schupp の定理の厳密かつ自己完結的な証明を与える．本稿の内容は Diekert と Weißによるノート [DW17] を大いに参考にしている．

Keywords: 実質的自由群 (virtually free groups)，群の語の問題 (word problem for groups)，文脈自由言語 (context-free languages)，書き換え系 (rewriting systems)，オートマトン (automata)，自由積 (free product)，融合積 (free product with amalgamation)，HNN 拡大 (HNN extension)，Cayley グラフ (Cayley graph)，木幅 (treewidth)，最適入れ子状カット (optimally nested cut)，群付きグラフの基本群 (fundamental group of a graph of groups)，Bass–Serre 木 (Bass–Serre tree).

本稿の内容と構成

本稿の目標は，以下の定理に完全な証明を与えることである (図 1)．定理の主張に含まれる用語については必要に応じてその都度解説することにする．

定理 0.1. 有限生成群 G に対し，以下の条件はすべて同値である．

(A) G は実質的自由群である．
(B) G の語の問題はあるプッシュダウンオートマトンにより認識される．
(C) G の語の問題はある文脈自由文法により生成される．
(D) G の Cayley グラフの木幅が有限である．
(E) G はある木に作用し，その軌道は有限個であり，かつ各頂点の固定群が有限群である．
(F) G は頂点群がどれも有限群であるような，ある有限な群付きグラフの基本群である．

本稿を読むにあたって必要な前提知識としては，論理と集合・写像といった基礎知識や，群論の初歩を知っていれば十分である (と思う)．

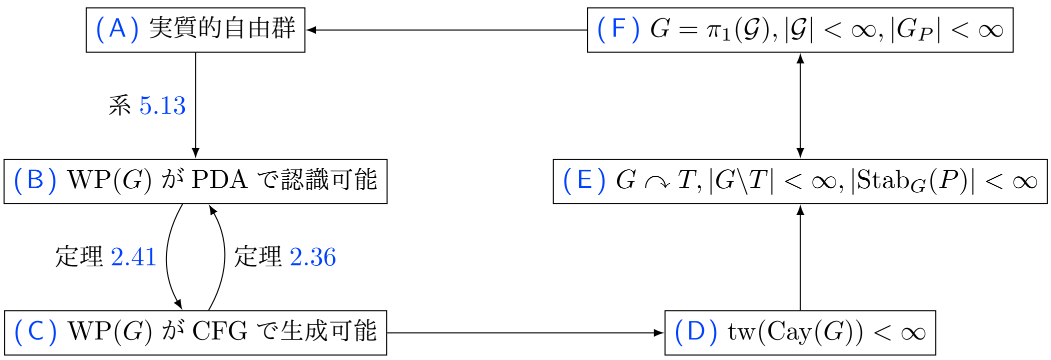


図 1　本稿で証明する導出関係

本稿の性格

本稿は「入門書を兼ねた筆者の備忘録」である．入門書であるから，理解を助けるための具体例を随所に挿入しつつ，自己完結的で行間の少ない証明を心掛けた．しかしその厳密さと備忘録という性質上，本稿には必要以上にくどい証明が多く，ページ数も長大になってしまった．細かい証明などは書いておかないと筆者自身が忘れてしまうので，仕方のないことではあるのだが，そのせいで却って読み難くなっているところもあるかもしれない．そんなときには証明のアイデアだけ把握して適度に読み飛ばしてほしい．証明に際してはアイデアや意図ができるだけ伝わるように書いたつもりなので，多少読み飛ばしても問題は生じないと思う．

謝辞

本稿を公開してから，ありがたいことに幾人かの方から誤りの指摘を頂きました:

Q-rad.heart さん，b312546656 さん．

あらためて御礼申し上げます．当然ながら，残った誤りの責はすべて筆者にあります．

目次

はじめに ii

目次 v

記号一覧 viii

第 I 部　文字列 1

第 1 章　書き換え系入門 2

1.1　二項関係に対する演算 . . . 3
1.2　抽象書き換え系 . . . 4
1.3　文字列と文字列書き換え系 . . . 7

第 2 章　形式言語理論入門 9

2.1　文法による言語の定義 . . . 10
2.2　正則言語 (正規言語) . . . 12
2.2.1　有限オートマトン . . . 12
2.2.2　正則表現 (正規表現) と有理的部分集合 . . . 16
2.2.3　認識可能部分集合，統語モノイド，Myhill–Nerode の定理 . . . 18
2.2.4　まとめ . . . 20
2.3　文脈自由言語 . . . 21
2.3.1　構文木と最左導出 . . . 21
2.3.2　Chomsky 標準形 . . . 24
2.3.3　プッシュダウンオートマトン . . . 28
2.3.4　文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの等価性 . . . 30
2.4　言語クラスの閉包性 . . . 36
2.4.1　Boole 演算と正則演算 . . . 36
2.4.2　モノイド準同型による像と逆像 . . . 38

第 II 部　群 41

第 3 章　群論再入門 42

3.1　群に関する用語と記法 . . . 42
3.1.1　群と部分群 . . . 42

3.1.2 群の作用 43
3.1.3 共役 44
3.1.4 生成される部分群と正規部分群 44
3.2 有限指数部分群と実質的性質 (virtually ○○) 44

第 4 章 群の種々の構成法と普遍性 47
4.1 群の直積とアーベル群の直和 47
4.2 交換子とアーベル化 49
4.3 自由群 50
4.4 群の表示 55
4.5 自由積 58
4.6 融合積 64
4.7 例: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 70
4.7.1 一次分数変換による射影直線への作用 70
4.7.2 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成系と Sanov 部分群 71
4.7.3 ピンポン補題と Sanov 部分群の自由性 74
4.7.4 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が自由積と融合積で書けること 76
4.8 半直積 78
4.9 HNN 拡大 82

第 5 章 群の語の問題 89
5.1 定義と基本性質 89
5.2 有限群と正則言語の対応 90
5.3 実質的自由群の語の問題が文脈自由言語であること 91

第 III 部 グラフ 97

第 6 章 グラフに関する基礎知識 98
6.1 グラフの定義 98
6.2 部分グラフと誘導部分グラフ 99
6.3 グラフ準同型写像 100
6.4 パスと閉路 101
6.5 単純グラフ 105
6.6 距離と測地線 106
6.7 木 107
6.8 グラフの自己同型写像と商グラフ 110

第 7 章 群とグラフ 113
7.1 Cayley グラフ 113
7.1.1 定義と例，基本性質 113
7.1.2 群の語の問題との関係 119
7.2 自由群と木 120
7.2.1 部分木の持ち上げ 120

7.2.2 部分木を潰す 122
7.2.3 Cayley グラフが木になる群は自由群に限る 123
7.2.4 木に自由かつ反転なしで作用する群は自由群である 124
7.2.5 Nielsen–Schreier の定理と Schreier の指数公式 127
7.2.6 具体例 130

第 8 章 グラフの木幅 133

第 9 章 カットと構造木 134

第 10 章 Bass–Serre 理論入門 135

第 IV 部 付録 136

付録 A 形式言語理論続論 137

付録 B Muller–Schupp の原論文における証明法 138

付録 C Stallings の前群と測地的書き換え系 139

参考文献 140

変更履歴 142

記号一覧

記号	意味
$A := B$	記号 A を B で定義する
$P \;:\Longleftrightarrow\; Q$	P であることを Q が成り立つこととして定義する
$P \iff Q$	P と Q は同値
$P \implies Q$	P ならば Q
$P \wedge Q$	P かつ Q
$P \vee Q$	P または Q (少なくとも一方が成り立つ)
$\neg P$	P でない
$\forall x\ [\cdots]$	すべての x に対して…が成り立つ
$\exists x\ [\cdots]$	…が成り立つような x が存在する
$\exists! x\ [\cdots]$	…が成り立つような x がただ一つ存在する
$\lvert X\rvert$	集合 X の濃度
$X \subseteq Y$	X は Y の部分集合
$X - Y$	X と Y の差集合
$X \sqcup Y$	X と Y の直和 (非交和)
$\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	集合族の直和 (非交和)
$f\colon X \to Y$	f は集合 X から Y への写像
$X \hookrightarrow Y$	X から Y への単射，もしくは包含写像
$X \twoheadrightarrow Y$	X から Y への全射
$f{\restriction}A$	写像 $f\colon X \to Y$ の部分集合 $A \subseteq X$ への制限
$[w]$	元 w によって代表される同値類
$\mathbb{N}$	自然数 (0 を含む) 全体の集合
$\mathbb{Z}_{>0}$	正の整数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathrm{IRR}(\longrightarrow)$	抽象書き換え系 $\longrightarrow$ に関する正規形全体の集合
Σ^*	アルファベット Σ 上の文字列全体の集合
ε	空文字列
$\lvert w\rvert$	文字列 w の長さ
$\lvert w\rvert_a$	文字列 w に含まれる文字 a の個数
$u \preccurlyeq v$	文字列 u は文字列 v の接頭辞 (始切片)

記号	意味
$\mathrm{L}(G)$	文法 G が生成する言語
$\mathrm{L}(\mathcal{A})$	オートマトン $\mathcal{A}$ が認識する言語
$\mathrm{L}(E)$	正則表現 E の表す言語
$L_1 \cdot L_2, L_1L_2$	言語 L_1 と L_2 の連接
L^*	言語 L の Kleene 閉包
$\equiv_L$	言語 L の統語的合同関係
$\mathrm{Syn}(L)$	言語 L の統語モノイド
REG	正則言語 (正規言語) 全体のクラス
CFL	文脈自由言語全体のクラス
DCFL	決定性文脈自由言語全体のクラス
V_4	Klein の四元群
D_n	位数 $2n$ の二面体群
D_∞	無限二面体群
S_n	n 次対称群
A_n	n 次交代群
$\mathrm{GL}_n(R)$	環 R 上の n 次の一般線形群
$\mathrm{SL}_n(R)$	環 R 上の n 次の特殊線形群
$\mathrm{PSL}_n(R)$	環 R 上の n 次の射影特殊線形群
$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ のアフィン変換群
$H_\mathbb{Z}$	離散 Heisenberg 群
$\mathrm{BS}(m,n)$	Baumslag–Solitar 群
1_G	群 G の単位元
$H \leq G$	H は G の部分群
$(G : H)$	部分群 $H \leq G$ の G における指数
$N \lhd G$	N は G の正規部分群
$\mathrm{Ker}(f)$	群準同型写像 f の核
$\mathrm{Im}(f)$	群準同型写像 f の像
$\mathrm{Z}_G(S)$	$S \subseteq G$ の G における中心化群
$\mathrm{Z}(G)$	群 G の中心
$\mathrm{N}_G(S)$	$S \subseteq G$ の G における正規化群
$\mathrm{Aut}(X)$	X の自己同型群
$G \curvearrowright X$	群 G の集合 X への作用，または作用していること
$\mathrm{Orb}_G(x)$	群 G の作用による元 $x \in X$ の軌道
$\mathrm{Stab}_G(x)$	群 G の作用による元 $x \in X$ の固定群
a^g	群の元 a の g による共役 gag^{-1}
$\langle S \rangle$	部分集合 $S \subseteq G$ で生成される部分群
$\langle\langle S \rangle\rangle$	部分集合 $S \subseteq G$ の正規閉包
$[x,y]$	群の元 $x, y \in G$ の交換子 $xyx^{-1}y^{-1}$
$[G,G]$	群 G の交換子群

記号	意味
G^{ab}	群 G のアーベル化
Σ_X	アルファベット $X \sqcup \bar{X}$
$\mathrm{F}(X)$	集合 X を基底とする自由群
$\mathrm{rank}(F)$	自由群 F の階数
$\langle X \mid R \rangle$	生成元 X と関係式 R からなる群の表示
$\mathop{\ast}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$	群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の自由積
$G_1 * G_2$	群 G_1, G_2 の自由積
$\mathop{\ast}_A G_\lambda$	群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の A に関する融合積
$G_1 *_A G_2$	群 G_1, G_2 の A に関する融合積
$\mathbb{P}^1(K)$	体 K 上の射影直線
$\Gamma(N)$	レベル N の合同部分群 $\leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
$N \rtimes_\alpha H$	群 H と N の，作用 $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ に関する半直積
$G *_A$	群 G の A に関する HNN 拡大
$\mathrm{WP}_\pi(G)$	有限生成群 G の，全射群準同型 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ に関する語の問題
$s(y)$	グラフの辺 y の始点
$t(y)$	グラフの辺 y の終点
$\bar{y}$	グラフの辺 y の反転
$\mathrm{V}(\Gamma)$	グラフ Γ の頂点集合
$\mathrm{E}(\Gamma)$	グラフ Γ の辺集合
$\deg(P)$	グラフの頂点 P の次数
$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$	グラフ Γ_0 はグラフ Γ の部分グラフ
$\Gamma[S]$	部分集合 $S \subseteq \Gamma$ が誘導する誘導部分グラフ
$\Gamma_1 \cong \Gamma_2$	グラフ Γ_1 と Γ_2 は同型である
$\mathrm{Im}(f)$	グラフ準同型写像 f の像
Path_n	長さ n のパスグラフ
Cycle_n	長さ n のサイクルグラフ
$\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}$	片側無限のパスグラフ
$\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$	両側無限のパスグラフ
$f \cdot g$	パス f, g の合成
$d(P, Q)$	連結グラフの頂点 P, Q 間の距離
$\mathrm{Aut}(\Gamma)$	グラフ Γ の自己同型群
$G\backslash\Gamma$	群 G の反転なしの作用によるグラフ Γ の商グラフ
$\mathrm{Cay}(G, S)$	群 G の，部分集合 $S \subseteq G$ に関する Cayley グラフ
$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G, S)$	群 G の，部分集合 $S \subseteq G$ に関する単純化 Cayley グラフ
$\Gamma/\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$	グラフ Γ 内の互いに素な部分木の族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を縮約したグラフ

第 I 部

文字列

第 1 章

書き換え系入門

本章では**書き換え系** (rewriting system) と呼ばれる概念を整備する．書き換え系は本稿全体にわたって用いられる基本的な道具であり，特に**文字列書き換え系** (string rewriting system) は，ともすれば組合せ群論において省かれがちな証明の細部を補完にするのに役立つ強力なツールである．書き換え系についてより詳しく知りたい読者は，例えば Baader と Nipkow による教科書 [BN98] などを参照のこと．

書き換え系の感じをつかんでもらうために，文字列書き換え系の代わりに**項書換え系** (term rewriting system) を例にとって説明する (一般的には文字列書き換え系よりも項書き換え系の方が有名であろう)．算数のテストで，「$1+2$ を計算しなさい」という問題が出されたとしよう．当然，答えは「3」であるが，ひねくれた回答者が答案用紙に「$7-4$」と書いて提出したら，採点者は丸をつけないだろう．値としては 3 と等しいにも関わらず，なぜ不正解なのだろうか？もちろん，こんな答案を許してしまっては「$1+2=?$」に対して「$1+2$」と答えても正答となってしまい，テストをする意味がなくなってしまうからであるが，「3」だけが正解として扱われるのは，数値としての 3 を表す表記の中で「3」が “最も簡単な形” だからだと考えられる．

ここで，算数の計算問題とは「与えられた式 ($=$ 項) を，その値を変えずに，最も簡単な形に “書き換え” よ」という問題である，という立場をとることにする．ここで「最も簡単」という表現は，「これ以上計算を進めることができない」とも言い換えられる．「計算を進める」という表現からもわかる通り，「$1+2$」という表記から「3」という表記を得るプロセスは一方通行であり，この意味で計算という行為はある種の非対称性を内包している．同じ値を表す表記が複数あるとき，それらを一緒くたに同一視せず，優劣を付けて “非対称化” するのが書き換え系のアイデアである，ということもできる．もちろん，優劣の定め方は一通りではなく，例えば $(x+1)/x$ と $1+1/x$ のどちらがより “簡単” な表記かを一概に決めることはできないだろう．

「これ以上計算を進めることができない状態」のことを，書き換え系の言葉では**正規形** (normal form) あるいは**既約である** (irreducible) という．自然数の足し算については結合法則が成り立つので，例えば $5+3+7$ を $5+3$ から計算 ($=$ 書き換え) しても $3+7$ から計算しても，最終的な結果はどちらも 15 になる．このように，表記を書き換える順序によらずに同じ計算結果が得られるという性質を，書き換え系の言葉では**合流性** (confluence) という．また，有限個の自然数の足し算は有限回の書き換えによって計算することができ，無限ループに陥ることがない．このように，どんな計算も (どんな順序で計算しても) いつか必ず終わるということは，書き換え系の言葉では**停止性を持つ** (terminating) という条件に対応する．

書き換え系は表記が表す値が異なることを証明するのに役立つことがある．例えば，$3+5+8$ と $1+2+9$ は明らかに異なる値を表すが，ではその理由は，と尋ねられれば「$16 \neq 12$ だから」と答えるだろう．これは書き換え系の観点からは，両者を正規形になるまで書き換え，正規形が異なる表記だから違う値であると結論していることになる．これと似たような議論を有限表示群に対して行うことで，群論における数多くの有用な結果を得ることができる．

書き換え系に対する感覚をつかんだところで，早速数学的な内容に入っていこう．

1.1　二項関係に対する演算

集合 X 上の**二項関係** (binary relation) とは，直積集合 $X \times X$ の部分集合のことであった．まずは矢印的な形状の二項関係に関する記法をいくつか用意しておく．

定義 1.1.　X を集合とし，$\longrightarrow$ を X 上の二項関係とする．つまり，$\longrightarrow\ \subseteq X \times X$ である．2 つの元 $x, y \in X$ に対し，$(x, y) \in\ \longrightarrow$ が成り立つことを $x \longrightarrow y$ と表す．このとき，以下のように記号を定義する．

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \circ \longrightarrow &:= \{\,(x,y) \in X \times X \mid \exists z \in X\ [x \longrightarrow z \land z \longrightarrow y]\,\}, && \text{(合成)}\\
\xrightarrow{0} &:= \{\,(x,y) \in X \times X \mid x = y\,\}, && \text{(恒等関係，対角集合)}\\
\xrightarrow{n+1} &:= \xrightarrow{n} \circ \longrightarrow \quad (n \in \mathbb{N}), && \text{(反復合成)}\\
\xrightarrow{\leq k} &:= \bigcup_{n \leq k} \xrightarrow{n} \quad (k \in \mathbb{N}), && \text{(k 回以下の合成)}\\
\xrightarrow{+} &:= \bigcup_{n \geq 1} \xrightarrow{n}, && \text{(推移閉包)}\\
\xrightarrow{*} &:= \bigcup_{n \geq 0} \xrightarrow{n} = \xrightarrow{0} \cup \xrightarrow{+}, && \text{(反射推移閉包，Kleene 閉包)}\\
\longleftarrow &:= \{\,(x,y) \in X \times X \mid y \longrightarrow x\,\}, && \text{(逆関係)}\\
\longleftrightarrow &:= \longrightarrow \cup \longleftarrow. && \text{(対称閉包)}
\end{aligned}
$$

$\xleftrightarrow{*}$ を $\longrightarrow$ の反射推移対称閉包と呼ぶ．

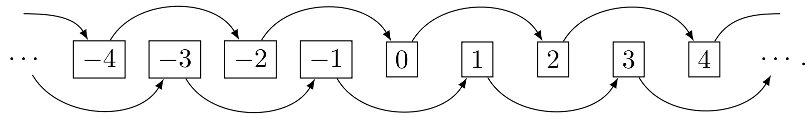
一般に，集合 X 上の二項関係であって，反射律と推移律をみたすもの (つまり，(半) 順序の定義から反対称律を除いたもの) を**前順序** (preorder, quasi-ordering) と呼ぶのであった．定義 1.1 から明らかに次が成り立つ．

命題 1.2.　集合 X 上の同値関係 $\longrightarrow$ に対し，以下が成り立つ．

(1) $\xrightarrow{*}$ は $\longrightarrow$ を含む最小の前順序関係である．
(2) $\xleftrightarrow{*}$ は $\longrightarrow$ を含む最小の同値関係である．

証明． 容易．　□

例 1.3.　整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\longrightarrow\ \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を，$m, n \in \mathbb{Z}$ に対し $m \longrightarrow n \ :\Longleftrightarrow\ n = m + 2$ と定義する．この状況を図で表すと以下のようになる:



このとき，$m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$
\begin{aligned}
m \longleftrightarrow n &\iff |n - m| = 2,\\
m \xrightarrow{*} n &\iff \exists k \geq 0\ [n = m + 2k],\\
m \xleftrightarrow{*} n &\iff m \equiv n \pmod 2
\end{aligned}
$$

であり，同値関係 $\xleftrightarrow{*}$ による $\mathbb{Z}$ の商は $\mathbb{Z}/\xleftrightarrow{*}\ = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる．

1.2　抽象書き換え系

ここでは抽象書き換え系と呼ばれる，最も基本的な書き換え系の性質を扱う．抽象書き換え系という大層な名前が付けられてはいるが，その実体はただの二項関係である．

定義 1.4 (抽象書き換え系). 集合 X 上の二項関係 $\longrightarrow \subseteq X \times X$ のことを，X 上の**抽象書き換え系** (abstract rewriting system) という．$x, y \in X$ が $x \xrightarrow{*} y$ をみたすとき，$\longrightarrow$ によって x から y を**導出する** (derive) ことができるといい，定義から存在する X の元の有限列 $x = x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_n = y$ $(n \geq 0)$ のことを $x \xrightarrow{*} y$ の**導出** (derivation) という．$\overset{*}{\longleftrightarrow}$ に対する導出も同様に定義される．

定義 1.5 (書き換え系の性質). $\longrightarrow$ を X 上の抽象書き換え系とする．

(1) $\longrightarrow$ が**強合流的である** (strongly confluent) とは，$x, y, z \in X$ について $y \longleftarrow x \longrightarrow z$ ならば，ある $w \in X$ が存在して $y \xrightarrow{\leq 1} w \xleftarrow{\leq 1} z$ となることである．強合流的であるという性質を**強合流性** (strong confluence) という．

(2) $\longrightarrow$ が**局所合流的である** (locally confluent) とは，$x, y, z \in X$ について $y \longleftarrow x \longrightarrow z$ ならば，ある $w \in X$ が存在して $y \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} z$ となることである．局所合流的であるという性質を**局所合流性** (local confluence) という．

(3) $\longrightarrow$ が**合流的である** (confluent) とは，$x, y, z \in X$ について $y \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} z$ ならば，ある $w \in X$ が存在して $y \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} z$ となることである．合流的であるという性質を**合流性** (confluence) という．

(4) $\longrightarrow$ が **Church–Rosser 性** (Church–Rosser property) を持つとは，$x, y \in X$ について $x \overset{*}{\longleftrightarrow} y$ ならば，ある $z \in X$ が存在して $x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$ となることである．

(5) $\longrightarrow$ が**停止性を持つ** (terminating, Noetherian) とは，導出の無限列

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \cdots$$

が存在しないことをいう．言い換えると，二項関係 $\longrightarrow$ が**逆整礎である** (converse well-founded) ということである．

(6) $\longrightarrow$ が**収束的である** (convergent) とは，$\longrightarrow$ が局所合流的かつ停止性を持つことをいう．

まず，整礎関係に関する帰納法[1]の正当性を確かめておく．

補題 1.6 (整礎関係に関する帰納法). 集合 X 上の二項関係 $\longleftarrow \subseteq X \times X$ が整礎であるとする．すなわち，$\longleftarrow$ に関する X の元の無限下降列

$$\cdots \longleftarrow x_2 \longleftarrow x_1 \longleftarrow x_0$$

が存在しないとする[2]．このとき，X の元に関する性質 $P(x)$ ついて

$$\forall x \in X\ [\forall y \in X\ [y \longleftarrow x \implies P(y)] \implies P(x)] \implies \forall x \in X\ [P(x)]$$

が成り立つ．

[1] 俗に整礎帰納法と呼ばれることがある (かもしれない)．

[2] 整礎性は通常「空でないどんな部分集合も極小元を持つ」ことと定義されるが，これは従属選択公理のもとでは無限下降列の非存在と同値である．

証明． 背理法で示す．結論が成り立たないと仮定すると，

$$\forall x \in X\ [\neg P(x) \implies \exists y \in X\ [y \longleftarrow x \wedge \neg P(y)]], \tag{1.1}$$
$$\exists x \in X\ [\neg P(x)] \tag{1.2}$$

が成り立つ．式 (1.2) より，$\neg P(x_0)$ をみたす元 $x_0 \in X$ が存在する．式 (1.1) の x に x_0 を代入すると，$x_1 \longleftarrow x_0$ かつ $\neg P(x_1)$ をみたす元 $x_1 \in X$ を得る．再び式 (1.1) の x に x_1 を代入すると，$x_2 \longleftarrow x_1$ かつ $\neg P(x_2)$ をみたす元 $x_2 \in X$ を得る．同様にして，帰納的に $P(x)$ をみたさない元の無限下降列 $\cdots \longleftarrow x_2 \longleftarrow x_1 \longleftarrow x_0$ が得られるが，これは $\longleftarrow$ が整礎であるという仮定に反する． □

整礎関係に関する帰納法を用いると，以下の Newman の補題を比較的容易に示すことができる．

定理 1.7． 集合 X 上の抽象書き換え系 $\longrightarrow$ に対し，以下が成り立つ．

(1) $\longrightarrow$ が強合流的ならば局所合流的である．
(2) $\longrightarrow$ が収束的ならば合流的である．(**Newman の補題**)
(3) $\longrightarrow$ が合流的であることと Church–Rosser 性を持つことは同値である．

証明．

(1) 明らか．
(2) $\longrightarrow$ が逆整礎であることより，その推移閉包 $\xrightarrow{+}$ も逆整礎である．逆整礎関係 $\xrightarrow{+}$ に関する帰納法 1.6 で示す．任意に $x \in X$ をとる．$x \xrightarrow{+} x'$ なる任意の $x' \in X$ に対し合流性が成り立つと仮定する，すなわち $y', z' \in X$ について $y' \xleftarrow{*} x' \xrightarrow{*} z'$ ならば $y' \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} z'$ となる $w' \in X$ が存在すると仮定する (帰納法の仮定)．$y \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} z$ であるとする．$y = x$ または $z = x$ のときは明らかなので $y \neq x \neq z$ であるとしてよい．よって推移閉包の定義から $y \xleftarrow{*} y' \longleftarrow x \longrightarrow z' \xrightarrow{*} z$ となる $y', z' \in X$ が存在する．$\longrightarrow$ の局所合流性から $y' \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} z'$ となる $w' \in X$ が存在する．$x \longrightarrow y'$ かつ $y \xleftarrow{*} y' \xrightarrow{*} w'$ だから帰納法の仮定より $y \xrightarrow{*} u \xleftarrow{*} w'$ となる $u \in X$ が存在する．同様に $x \longrightarrow z'$ かつ $w' \xleftarrow{*} z' \xrightarrow{*} z$ だから帰納法の仮定より $w' \xrightarrow{*} v \xleftarrow{*} z$ となる $v \in X$ が存在する．最後に，$x \xrightarrow{+} w'$ かつ $u \xleftarrow{*} w' \xrightarrow{*} v$ だから帰納法の仮定より $u \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} v$ となる $w \in X$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & y' \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, dashed, "*"] & \mathrm{LC} & z' \arrow[dl, dashed, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
y \arrow[dr, dashed, "*"] & \mathrm{IH} & w' \arrow[dl, dashed, "*"'] \arrow[dr, dashed, "*"] & \mathrm{IH} & z \arrow[dl, dashed, "*"'] \\
 & u \arrow[dr, dashed, "*"] & \mathrm{IH} & v \arrow[dl, dashed, "*"'] & \\
 & & w. & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{cases} \mathrm{LC} = \text{local confluence}, \\ \mathrm{IH} = \text{induction hypothesis}. \end{cases}$$

(3) Church–Rosser 性を持つならば合流的であることは明らか．$\longrightarrow$ が合流的であるとする．$x, y \in X$ について $x \xleftrightarrow{*} y$ であると仮定し，$x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$ となる $z \in X$ が存在することを，$x \xleftrightarrow{*} y$ の導出の長さ，すなわち $x \xleftrightarrow{n} y$ となる n に関する帰納法で示す．長さが 0 のとき，すなわち $x = y$ のときは明らか．$x \neq y$ とし，$x \xleftrightarrow{*} y' \longleftrightarrow y$ であるとする．帰納法の仮定より，$x \xrightarrow{*} z' \xleftarrow{*} y'$ となる $z' \in X$ が存在する．
- $y' \longrightarrow y$ のとき，$z' \xleftarrow{*} y' \longrightarrow y$ だから合流性より $z' \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$ となる $z \in X$ が存在し，

$x \xrightarrow{*} z' \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, leftrightarrow, "*"] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{IH}"] \arrow[dr, dashed, "*"] & & y' \arrow[dl, dashed, "*"'] \arrow[dr] & \\
& z' \arrow[dr, dashed, "*"] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{C}"] & & y \arrow[dl, dashed, "*"'] \\
& & z. &
\end{tikzcd}$$

- $y' \longleftarrow y$ のとき，$x \xrightarrow{*} z' \xleftarrow{*} y' \longleftarrow y$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& & & y \arrow[dl] \\
x \arrow[rr, bend left, leftrightarrow, "*"] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{IH}"] \arrow[dr, dashed, "*"] & & y' \arrow[dl, dashed, "*"'] & \\
& z'. & &
\end{tikzcd}$$

□

注意 1.8. 抽象書き換え系は局所合流的であっても合流的でないことがありえる．実際，以下の 2 つの図は局所合流的だが合流的でない書き換え系の例になっている．

$$\begin{tikzcd}
\infty_0 & 0 \arrow[l] \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left] \arrow[r] & \infty_1,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & & & \infty_0 \\
0 \arrow[r] \arrow[urrrr, bend left] & 1 \arrow[r] \arrow[drrr, bend right] & 2 \arrow[r] \arrow[urr] & 3 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\
& & & & \infty_1.
\end{tikzcd}$$

実際，これらの書き換え系は停止性を持たない．

定義 1.9 (正規形). $\longrightarrow$ を集合 X 上の抽象書き換え系とする．$x \in X$ が $\longrightarrow$ に関する**正規形** (normal form) あるいは**既約である** (irreducible) とは，$x \longrightarrow y$ をみたす $y \in X$ が存在しないことである．$\longrightarrow$ に関する正規形全体の集合を $\mathrm{IRR}(\longrightarrow)$ で表す．

以下の定理は正規形を考える動機の一つである．

定理 1.10. $\longrightarrow$ を集合 X 上の収束的な抽象書き換え系とするとき，正規形の全体 $\mathrm{IRR}(\longrightarrow) \subseteq X$ は商集合 $X/\overset{*}{\longleftrightarrow}$ の完全代表系を与える．

証明. 元 $x \in X$ が代表する同値類 $[x] \in X/\overset{*}{\longleftrightarrow}$ をとる．$[x] \cap \mathrm{IRR}(\longrightarrow)$ が一点集合であることを示せばよい．仮に $[x] \cap \mathrm{IRR}(\longrightarrow) = \emptyset$ であるとすると，$\mathrm{IRR}(\longrightarrow)$ に属さない元の無限下降列 $x \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \cdots$ ができてしまい，$\longrightarrow$ が停止性を持つことに反する．よって $[x] \cap \mathrm{IRR}(\longrightarrow) \neq \emptyset$ である．任意に 2 元 $y, z \in [x] \cap \mathrm{IRR}(\longrightarrow)$ をとると，$y \overset{*}{\longleftrightarrow} z$ である．$\longrightarrow$ は収束的なので定理 1.7 により特に Church–Rosser 性を持ち，よって $y \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} z$ となる $w \in X$ が存在する．ここで $y, z \in \mathrm{IRR}(\longrightarrow)$ は正規形だから $y = w = z$ でなければならない． □

1.3　文字列と文字列書き換え系

文字列書き換え系とは，文字列集合上の抽象書き換え系のことである．まず，文字列を定義することから始めよう．

定義 1.11 (文字列). Σ を集合とする (大抵は有限集合を考える)．Σ 上の**文字列** (string) とは，集合 $\Sigma^* := \bigcup_{n\geq 0}\Sigma^n$ の元のことをいう．すなわち，文字列とは Σ の元の有限列のことである．文字列 $w \in \Sigma^n$ の長さ n を記号 $|w|$ で表す．長さ 0 の文字列がただ一つ存在するので，それを特別に**空文字列** (empty string) と呼び ε で表す．集合 Σ を**アルファベット** (alphabet) と呼ぶ[3]．2 つの文字列 $u \in \Sigma^m, v \in \Sigma^n$ について，u の直後に v を並べてできる長さ $m+n$ の文字列を uv で表し，これを u と v の**連接** (concatenation) という．Σ^* は連接により ε を単位元とするモノイドをなす．文字列 $w \in \Sigma^*$ に含まれる文字 $a \in \Sigma$ の個数を $|w|_a$ で表す．文字列 $u, v \in \Sigma^*$ について，ある文字列 $w \in \Sigma^*$ が存在して $uw = v$ となるとき，u は v の**接頭辞** (prefix) または**始切片** (initial segment) であるといい，記号 $u \preccurlyeq v$ で表す．$u \preccurlyeq v$ かつ $u \neq v$ であることを $u \prec v$ で表す．

Σ^* はモノイドの中でも特に**自由モノイド** (free monoid) と呼ばれる特別なモノイドになっている．

命題 1.12 (自由モノイドの普遍性). Σ を有限アルファベットとし，$i\colon \Sigma \hookrightarrow \Sigma^*$ を包含写像とする．任意のモノイド M と写像 $f\colon \Sigma \to M$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & M \\ \Sigma^* \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする (すなわち，$\tilde{f}\circ i = f$ をみたす) モノイド準同型写像 $\tilde{f}\colon \Sigma^* \to M$ がただ一つ存在する．

証明. 準同型性と可換性をみたすためには，各文字列 $w = a_1a_2\cdots a_n \in \Sigma^*$ $(n \geq 0, a_i \in \Sigma)$ に対し

$$\tilde{f}(w) = \tilde{f}(a_1)\tilde{f}(a_2)\cdots\tilde{f}(a_n) = \tilde{f}(i(a_1))\tilde{f}(i(a_2))\cdots\tilde{f}(i(a_n)) = f(a_1)f(a_2)\cdots f(a_n)$$

となるしかなく，また $\tilde{f}$ をこのように定義すれば実際にモノイド準同型写像になる． □

自由モノイドの「モノイド」を「群」に置き換えたものは**自由群** (free group) と呼ばれる．自由群については**??**節で扱う．

定義 1.13 (文字列書き換え系). Σ を (有限) アルファベットとする．Σ^* 上の抽象書き換え系 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ を**文字列書き換え系** (string rewriting system) または**半 Thue 系** (semi-Thue system) と呼ぶ．文字列書き換え系 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ に対し，新たな抽象書き換え系 $\underset{R}{\Longrightarrow} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ を

$$\underset{R}{\Longrightarrow} := \{\, (xuy, xvy) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid x, y, u, v \in \Sigma^*, (u, v) \in R \,\}$$

で定義する．抽象書き換え系の性質 P に対し，「$\underset{R}{\Longrightarrow}$ が P をみたす」と言う代わりに，「R が P をみたす」と言うことにする．また，$\underset{R}{\Longrightarrow}$ に関する正規形の全体 $\mathrm{IRR}(\underset{R}{\Longrightarrow})$ も単に $\mathrm{IRR}(R)$ と書くことにする．

感覚的には，各元 $(u, v) \in R$ は「u を v に書き換えてもよい」という規則を表しており，$u \underset{R}{\Longrightarrow} v$ は「u の部分文字列を R のある規則に従って書き換えることで v が得られる」ことを表す．

停止性を導く十分条件として，次の性質がある．

[3] Σ の元ではなく，あくまで集合 Σ のことをアルファベットと呼ぶことに注意する．

定義 1.14.　Σ 上の文字列書き換え系 R が**短縮的である**[4] (length-reducing, length-decreasing) とは，$x, y \in \Sigma^*$ について $x \underset{R}{\Longrightarrow} y$ ならば $|x| > |y|$ となることをいう．

命題 1.15.　文字列書き換え系 R が短縮的ならば停止性を持つ．

証明．文字列の長さが自然数であることより明らか．　□

最後に，文字列書き換え系を用いてモノイドを自由モノイドの商として表す方法を述べる．

補題 1.16.　Σ 上の文字列書き換え系 R に対し，以下が成り立つ．

(1) 文字列 $u, v \in \Sigma^*$ について $u \underset{R}{\Longrightarrow} v$ ならば，どんな文字列 $x, y \in \Sigma^*$ に対しても $xuy \underset{R}{\Longrightarrow} xvy$ となる．
(2) 文字列 $u, v \in \Sigma^*$ について $u \overset{*}{\underset{R}{\Longrightarrow}} v$ ならば，どんな文字列 $x, y \in \Sigma^*$ に対しても $xuy \overset{*}{\underset{R}{\Longrightarrow}} xvy$ となる．
(3) 文字列 $u, v \in \Sigma^*$ について $u \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} v$ ならば，どんな文字列 $x, y \in \Sigma^*$ に対しても $xuy \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} xvy$ となる．
(4) 文字列 $u, v, u', v' \in \Sigma^*$ について $u \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} u'$ かつ $v \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} v'$ ならば，$uu' \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} vv'$ となる．

証明．$\underset{R}{\Longrightarrow}$ の定義から容易にわかる．　□

Σ 上の文字列書き換え系 R について，命題 1.2.(2) より $\overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}}$ は Σ^* 上の同値関係であった．

命題 1.17.　Σ 上の文字列書き換え系 R に対し，商集合 $\Sigma^*/\overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}}$ には well-defined な商モノイドの構造が入る．

証明．文字列 $u, u', v, v' \in \Sigma^*$ について，$u \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} u'$ かつ $v \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} v'$ のとき $uv \overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}} u'v'$ であることが言えればよいが，これは補題 1.16 から明らか．このとき商写像 $\Sigma^* \twoheadrightarrow \Sigma^*/\overset{*}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}}; w \mapsto [w]$ はモノイド準同型写像になっている．　□

命題 1.17 は 4 章で自由群を定義するときなどに用いられる．

[4] 短縮的，という訳語は本稿だけのものである (あまり良い訳とも思えないが)．

第 2 章

形式言語理論入門

本章では，Muller–Schupp の定理 0.1 の主張を理解するために必要な，形式言語理論の基礎・基本について解説する．形式言語理論はその名の通り言語学とも関係が深い分野であるが，こんにちではむしろ計算機科学や数学の一分野であるとみなされることが多い (と思う)．形式言語理論は計算の理論と切っても切れない関係にあり，なによりプログラミング言語は形式言語の最たる例である．形式言語理論について，より詳しく知りたい読者は例えば計算理論の基本的な教科書 [Sip08, HMU03, Koz97] などを参照のこと．

形式言語理論 (formal language theory) とは「形式的な言語理論」というよりはむしろ「形式言語の理論」である (少なくとも数学においては)．数学的には，形式言語というのは単に文字列の集合のことである．

定義 2.1 (言語). Σ を有限アルファベットとする．Σ 上の文字列全体の集合 Σ^* の部分集合 $L \subseteq \Sigma^*$ のことを Σ 上の**形式言語** (formal language) または単に**言語** (language) と呼ぶ．

とはいえ，すべての部分集合 $L \subseteq \Sigma^*$ に興味があるわけではない．そもそも $\Sigma \neq \emptyset$ なら Σ 上の言語は非可算無限個存在するが，その中で有限の長さの定義を持つ言語は可算個しかない．そこで，言語の中でも有限の長さの “よい” 定義を持つ言語を扱いたい．これは例えるならば，すべての複素数を考える代わりに，有理数や代数的数といった対象に注目することに似ている[1]．

形式言語を有限の情報で定義する方法の中で，代表的なものが二つある．一つは**文法** (grammar) による定義であり，開始記号から文法規則に沿って**生成** (generate) される文字列を集めることにより言語を定める．もう一つは**オートマトン** (automaton) による定義であり，これは与えられた文字列が言語に属すか否かを判定する有限状態機械を構成するものである．

本稿では数ある言語クラスの中でも，特に重要な**正則言語**[2](regular language, 正規言語とも) と**文脈自由言語** (context-free langauge) を取り上げる．正則言語は**正則文法** (regular grammar, 正規文法とも) によって定義される言語であり，**有限オートマトン** (finite automaton) という機械によって認識される言語としても特徴付けられる．正則言語はあまり高い表現力を持つわけではないものの，シンプルで扱いやすく，性質も非常によいので入門に最適である．文脈自由言語は**文脈自由文法** (context-free grammar) または**プッシュダウンオートマトン** (pushdown automaton) によって定義される言語であり，正則言語よりも高い表現力を持ち，ある程度簡単な自然言語や，プログラミング言語の文法を記述するとができる．本稿の主題である Muller–Schupp の定理 0.1 は，群の語の問題が文脈自由言語であるための必要十分条件を与える定理である．

---

[1] これは単なる比喩ではなく，実際に正則言語や無曖昧文脈自由言語の母関数が有理関数や代数関数になることが知られている．詳しくは新屋 [新屋 17] などを参照されたい．

[2] regular language はふつう正規言語と訳されることが多いが，本稿では数学の慣習に合わせて regular に正則という訳を当てることにする．実際，[HMU03] のように regular language を正則言語と訳している教科書がある．

2.1　文法による言語の定義

まずは文法を用いた言語の定義から始めよう．形式文法は言語学者の Noam Chomsky が自然言語の構造を研究するために提案した**生成文法** (generative grammar) に由来する，自然言語の数学的モデルである [風上松町 04]．とはいえ，以降の話は完全に数学的なものなので，自然言語のことは忘れてしまって構わない．

定義 2.2 (形式文法).　**形式文法** (formal grammar)，あるいは単に**文法** (grammar) とは以下のデータからなる 5 つ組 $G = (V, \Sigma, P, S)$ である．

- **変数** (variable)[3] の有限集合 V，
- **終端記号** (terminal symbol) の有限集合 Σ，ただし $\Sigma \cap V = \emptyset$，
- **生成規則** (production rule) の有限集合 $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$，すなわち P は $(V \cup \Sigma)^*$ 上の文字列書き換え系，
- **開始記号** (start symbol) $S \in V$．

生成規則 $(\alpha, \beta) \in P$ のことを $\alpha \to \beta$ と書くことがある．さらに，第 1 成分が同じ複数の生成規則 $(\alpha, \beta_1), (\alpha, \beta_2), \ldots, (\alpha, \beta_n) \in P$ をまとめて $\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \mid \beta_n$ と書くことがある．Σ 上の言語

$$\mathrm{L}(G) := \{\, w \in \Sigma^* \mid S \xRightarrow[P]{*} w \,\}$$

のことを文法 G が**生成する** (generate) 言語という．

形式文法は非常に高い表現力を持つ反面，非常に複雑になりうるので分析が容易ではない．そこで，扱いやすいように文法の定義に制限を加えることを考える．

定義 2.3 (i 型文法, Chomsky 階層).　$G = (V, \Sigma, P, S)$ を文法とする．

- G が 0 **型文法** (type-0 grammar) または**句構造文法** (phrase structure grammar) であるとは，G が文法であること (つまり無条件) をいう．0 型文法 G の生成する言語 $\mathrm{L}(G)$ のことを**計算可枚挙言語** (computably enumerable language) または**再帰的可枚挙言語** (recursively enumerable language) と呼ぶ．
- G が 1 **型文法** (type-1 grammar) または**文脈依存文法** (context-sensitive grammar)，あるいは**単調文法** (monotone grammar) であるとは，各生成規則 $\alpha \to \beta \in P$ が $|\alpha| \leq |\beta|$ をみたすことをいう．ただし例外として，P のどの元の右辺にも S が現れない場合に限り $S \to \varepsilon$ という規則を P に含めてよい．1 型文法 G の生成する言語 $\mathrm{L}(G)$ のことを**文脈依存言語** (context-sensitive language) と呼ぶ．
- G が 2 **型文法** (type-2 grammar) または**文脈自由文法** (context-free grammar) であるとは，各生成規則 $\alpha \to \beta \in P$ が $\alpha \in V$ をみたすことをいう．2 型文法 G の生成する言語 $\mathrm{L}(G)$ のことを**文脈自由言語** (context-free language) と呼ぶ．
- G が 3 **型文法** (type-3 grammar) または**正則文法** (regular grammar, 正規文法とも) であるとは，各生成規則 $\alpha \to \beta \in P$ が $\alpha \in V$ かつ $\beta = \varepsilon \vee \exists w \in \Sigma^*\ \exists A \in V\ [\beta = wA]$ をみたすことをいう．3 型文法 G の生成する言語 $\mathrm{L}(G)$ のことを**正則言語** (regular language, 正規言語とも) と呼ぶ．

G_i が i 型文法 $(i = 1, 2, 3)$ であれば $\mathrm{L}(G_{i-1}) = \mathrm{L}(G_i)$ なる $(i-1)$ 型文法 G_{i-1} がとれる (これは $i = 1, 3$ のときは G_i が $(i-1)$ 型文法でもあることから明らかで，$i = 2$ の場合は後に示す定理 2.30 よりわかる)．

[3] V の元は**非終端記号** (non-terminal symbol) とも呼ばれる．

先程は自然言語のことは忘れてしまって構わないと言ったが，最初くらいは自然言語 (風) の例を見ておくこととしよう．

例 2.4.　文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
V &:= \{[\text{文}], [\text{名詞}], [\text{格助詞}], [\text{形容詞}], [\text{副詞}]\},\\
\Sigma &:= \{\ \text{箱}, \text{は}, \text{赤い}, \text{青い}, \text{大きい}, \text{小さい}, \text{とても}, \text{の隣にある}, \text{の中にある}\ \},\\
P &:= \begin{cases}
[\text{文}] \to [\text{名詞}][\text{格助詞}][\text{形容詞}],\\
[\text{名詞}] \to [\text{形容詞}][\text{名詞}] \mid [\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}] \mid [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}] \mid \text{箱},\\
[\text{格助詞}] \to \text{は},\\
[\text{形容詞}] \to [\text{副詞}][\text{形容詞}] \mid \text{赤い} \mid \text{青い} \mid \text{大きい} \mid \text{小さい},\\
[\text{副詞}] \to \text{とても},
\end{cases}\\
S &:= [\text{文}].
\end{aligned}
$$

このとき，例えば次のような導出がある．

$$
\begin{aligned}
&[\text{文}] \underset{P}{\Longrightarrow} [\text{名詞}][\text{格助詞}][\text{形容詞}] \underset{P}{\Longrightarrow} [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}] \underset{P}{\Longrightarrow} [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} [\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} [\text{形容詞}][\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} [\text{副詞}][\text{形容詞}][\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても}\ [\text{形容詞}][\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい}\ [\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい}\ [\text{形容詞}][\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い}\ [\text{名詞}]\ \text{の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある}\ [\text{形容詞}][\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い}\ [\text{名詞}]\ \text{の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある}\ [\text{形容詞}][\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある小さい}\ [\text{名詞}]\ \text{は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある小さい箱は}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある小さい箱は}\ [\text{副詞}][\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある小さい箱はとても}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある小さい箱はとても}\ [\text{副詞}][\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある小さい箱はとてもとても}\ [\text{形容詞}]\\
&\quad \underset{P}{\Longrightarrow} \text{とても大きい赤い箱の隣にある青い箱の中にある小さい箱はとてもとても赤い} \in \mathrm{L}(G).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

文脈自由文法の場合には，導出に対応する**構文木** (syntax tree) (正確な定義は 2.3.1 節で行う) を次の図 2.1 のように描くことができる．

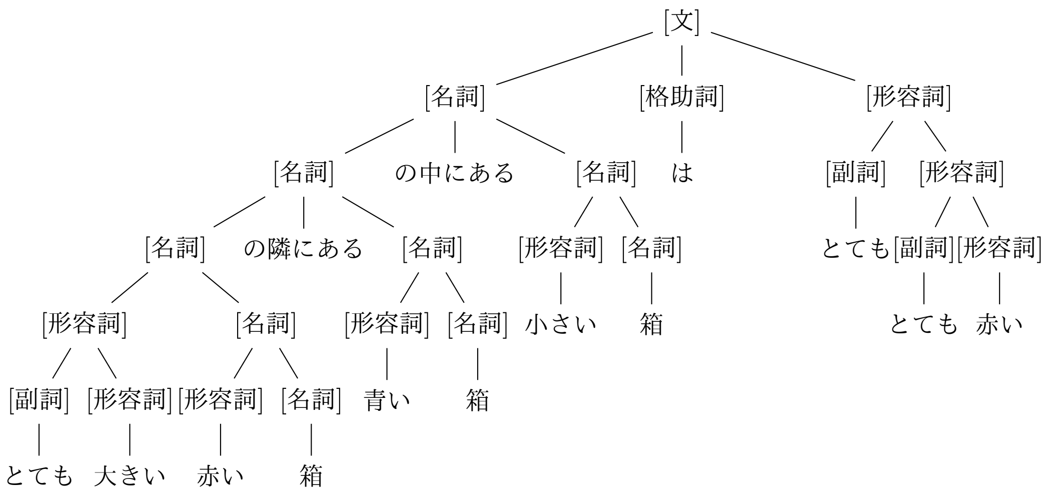


図 2.1　導出 (2.1) に対応する構文木

2.2　正則言語 (正規言語)

形式言語に慣れ親しむために，まずは扱いが比較的簡単な正則言語から始めよう．正則文法の表現力はそれほど高いわけではないものの，正則言語には特出した数学的性質のよさがある．その証拠に，正則言語は多種多様な特徴付けを持っている．数学において，よい概念は多くの特徴付けを持つ．本稿ではそのすべてを紹介することはできないが，特に重要な有限オートマトン，正則表現，統語モノイドによる特徴付けについては証明を行う (定理 2.22)．定義 2.3 では正則言語は正則文法により生成される言語としたが，他の文献では同値な他の定義が採用されていることが多い．正則言語についてさらに詳しく知りたい読者は，新屋によるサーベイ論文 [新屋 17] や Sakarovitch [Sak09], Lawson [Law04] などの教科書を参照されたい．

2.2.1　有限オートマトン

有限オートマトンとは，固定された有限の記憶領域のみを持つ，非常に単純な計算モデルのひとつである．有限オートマトンは与えられた文字列が言語に属すかどうかを，次のように判定する．文字列を左から 1 文字ずつ順番に読んでいき，現在の内部状態と読み込んだ文字に応じて内部状態を変化させることができる．文字列を読み終わった段階で内部状態があらかじめ指定された状態のいずれかになっていれば，文字列は受理され，言語に属していると判定される．

定義 2.5 (有限オートマトン).　**非決定性有限オートマトン** (non-deterministic finite automaton; NFA) とは，以下のデータからなる 5 つ組 $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ のことである．

- **状態** (state) の有限集合 Q,
- 有限アルファベット Σ,
- **遷移関係** (transition relation) $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$,
- **開始状態** (start state) $q_0 \in Q$,
- **受理状態** (accept state, final state) の集合 $F \subseteq Q$.

NFA $\mathcal{A}$ が**決定性有限オートマトン** (deterministic finite automaton; DFA) であるとは，遷移関係 δ が $Q \times \Sigma$ から Q への関数であること，すなわち

- $\forall (q, a) \in Q \times \Sigma\ \exists! r \in Q\ [(q, a, r) \in \delta]$,

- $\neg\exists q, r \in Q\ [(q, \varepsilon, r) \in \delta]$

をみたすことをいう．NFA $\mathcal{A}$ が文字列 $w \in \Sigma^*$ を**受理する** (accept) とは，以下の条件をみたす状態の有限列 $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ $(m \geq 0)$ と文字または ε の有限列 $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ が存在することをいう．

- $a_1 a_2 \cdots a_m = w$,
- $r_0 = q_0$,
- $i = 0, \ldots, m-1$ に対し $(r_i, a_{i+1}, r_{i+1}) \in \delta$,
- $r_m \in F$.

$\mathcal{A}$ が DFA のときは，$\mathcal{A}$ が文字列 $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ $(a_i \in \Sigma)$ を受理することは，帰納的に $r_0 := q_0, r_{i+1} := \delta(r_i, a_{i+1})$ $(0 \leq i \leq n-1)$ と定義したときに $r_n \in F$ となることと言い換えられる．Σ 上の言語

$$\mathrm{L}(\mathcal{A}) := \{\, w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ は } w \text{ を受理する} \,\}$$

のことを $\mathcal{A}$ が**認識する** (recognize) 言語という．Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が $L = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ をみたすとき，L は $\mathcal{A}$ によって**認識される** (recognized) という．

NFA の遷移関係 δ の各元 $(q, a, r) \in \delta$ のことを**遷移** (transition) という．遷移 $(q, a, r) \in \delta$ は「現在の状態が q であるとき，文字 (または ε) a を読み込んで状態を r に変化させてよい」ということを意味する．文字を読まずに状態を変化させる，$(q, \varepsilon, r) \in \delta$ の形の遷移を **ε 遷移** (ε-transition) という．同じ文字を読み込んだ際に (あるいは読み込まずに) 遷移する先の状態に複数の可能性があることが，**非決定性** (non-deterministic) という形容詞が付いている理由である．

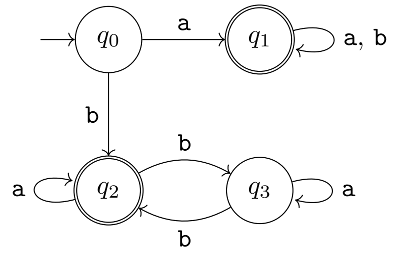
一方，DFA の場合には，遷移 $(q, a, r) \in \delta$ は関数として $\delta(q, a) = r$ という関係が成り立つことを意味し，すなわち「現在の状態が q であるとき，文字 a を読み込んだら次の状態が r に変化する」ということを意味する．**決定性** (deterministic) という形容詞はもちろん，文字を読み込んだ際に遷移する先が一意に決まることを表している．

有限オートマトンを図で表す便利な方法に**状態遷移図** (state diagram) というものがある．状態遷移図の形式的な定義をだらだらと述べるよりも，以下の例を見て納得する方が手っ取り早いだろう．

例 2.6. NFA $\mathcal{A}_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を

$$\begin{aligned}
Q &:= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \\
\Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \\
\delta &:= \left\{ \begin{array}{l} (q_0, \mathtt{a}, q_1), (q_0, \mathtt{b}, q_2), (q_1, \mathtt{a}, q_1), (q_1, \mathtt{b}, q_1), \\ (q_2, \mathtt{a}, q_2), (q_2, \mathtt{b}, q_3), (q_3, \mathtt{a}, q_3), (q_3, \mathtt{b}, q_2) \end{array} \right\}, \\
F &:= \{q_1, q_2\}
\end{aligned}$$

と定義する．$\mathcal{A}_1$ は DFA になっている．$\mathcal{A}_1$ の状態遷移図は次のようになる．



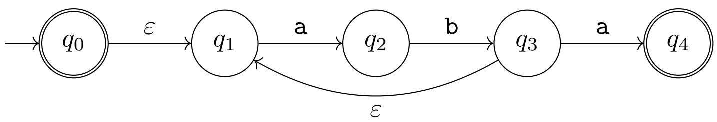
すなわち，NFA の状態遷移図は次のような規則で描かれるラベル付きグラフである．

- 各々の状態をグラフの頂点とし，丸で囲む．
- 開始状態 q_0 を示す矢印を書く．
- 受理状態は二重丸にする．
- 各遷移 $(q, a, r) \in \delta$ に対し，q から r へ向かって a でラベル付けされた辺を引く．

$\mathcal{A}_1$ が認識する言語は $\mathrm{L}(\mathcal{A}_1) = \{\, w \in \Sigma^* \mid w$ は $\mathtt{a}$ で始まるか，または $\mathtt{b}$ を奇数個含む $\}$ である．
次に，NFA $\mathcal{A}_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を

$$\begin{aligned}
Q &:= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\},\\
\Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\},\\
\delta &:= \{(q_0, \varepsilon, q_1), (q_1, \mathtt{a}, q_2), (q_2, \mathtt{b}, q_3), (q_3, \varepsilon, q_1), (q_3, \mathtt{a}, q_4)\},\\
F &:= \{q_0, q_4\}
\end{aligned}$$

と定義する．$\mathcal{A}_2$ は DFA ではない NFA である．$\mathcal{A}_2$ の状態遷移図は次のようになる．



$\mathcal{A}_2$ が認識する言語は $\mathrm{L}(\mathcal{A}_2) = \{\varepsilon\} \cup \{\, w\mathtt{a} \in \Sigma^* \mid w$ は $\mathtt{ab}$ の 1 回以上の繰り返し $\}$ である．

次の定理は，NFA が正則文法と同等の表現力を持つことを主張するものである．すなわち，正則言語とはある NFA で認識される言語のことである．

定理 2.7.　Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対し，以下の条件は同値である．

(1) L はある正則文法によって生成される．
(2) L はある NFA によって認識される．

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2).　L を生成する正則文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ をとる．このとき，NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を

$$\begin{aligned}
Q &:= V \cup \bigcup \{\, \{\, a_j a_{j+1} \cdots a_n B \mid 2 \le j \le n \,\} \mid A, B \in V, a_i \in \Sigma, A \to a_1 a_2 \cdots a_n B \in P \,\},\\
\delta &:= \{\, (A, \varepsilon, B) \mid A \to B \in P \,\} \cup \{\, (A, a, wB) \mid A, B \in V, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*, A \to awB \in P \,\}\\
&\qquad \cup \{\, (awB, a, wB) \mid a \in \Sigma, w \in \Sigma^*, B \in V, awB, wB \in Q \,\},\\
q_0 &:= S,\\
F &:= \{\, A \in V \mid A \to \varepsilon \in P \,\}.
\end{aligned}$$

と定義すれば $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \mathrm{L}(G) = L$ となる (下の例 2.8 も参照のこと)．
(2) $\Longrightarrow$ (1).　L を認識する NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ をとる．このとき，正則文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を

$$\begin{aligned}
V &:= Q,\\
P &:= \{\, q \to ar \mid (q, a, r) \in \delta \,\} \cup \{\, q \to \varepsilon \mid q \in F \,\},\\
S &:= q_0
\end{aligned}$$

と定義すれば $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(\mathcal{A}) = L$ となる．　□

例 2.8.　正則文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を

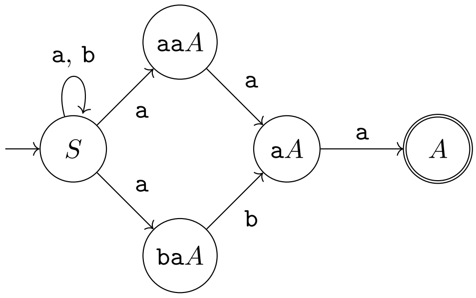
$$V := \{S, A\},$$

$$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\},$$
$$P := \begin{cases} S \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}S \mid \mathtt{aaa}A \mid \mathtt{aba}A, \\ A \to \varepsilon \end{cases}$$

と定義する．このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(G) &= \{\, w\mathtt{aaa} \mid w \in \Sigma^* \,\} \cup \{\, w\mathtt{aba} \mid w \in \Sigma^* \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ の一番最後の文字と後ろから 3 番目の文字が } \mathtt{a} \,\} \end{aligned}$$

である．この G に対応する NFA $\mathcal{A}$ を定理 2.7 の証明に従って構成すると以下のようになる．



DFA は定義より明らかに NFA であるが，逆は一般には成り立たない．では，NFA は DFA よりも真に高い表現力を持っているだろうか？ 言い換えると，ある NFA によって認識することができるが，いかなる DFA によっても認識されないような，そんな言語が存在するだろうか？ 実はそのような言語は存在しない．すなわち，NFA を DFA に制限することは表現力をまったく損なわないのである．

定理 2.9 (Rabin–Scott の冪集合構成 (powerset construction) [RS59, Theorem 11][4]**).** Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対し，以下の 2 条件は同値である．

(1) L はある DFA により認識される．
(2) L はある NFA により認識される．

証明のアイデアは定理のインパクトに反してとても単純である: 文字列を手前から読んでいったとき，ある時点で「いる」ことができる状態の全体をそのときの状態とすればよい．

証明． (1) $\Longrightarrow$ (2) は定義より明らか．(2) $\Longrightarrow$ (1) を示す．$L = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ となる NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ をとる．$\mathcal{A}$ の状態の集合 $R \subseteq Q$ に対し，次のように記号を定義する．

$$\begin{aligned} E_0(R) &:= R, \\ E_{n+1}(R) &:= \{\, r \in Q \mid q \in E_n(R), (q, \varepsilon, r) \in \delta \,\} \\ &= \{\, q \in Q \mid q \text{ は } R \text{ のある元から } n+1 \text{ 回以下の } \varepsilon \text{ 遷移で到達できる} \,\}, \\ E(R) &:= \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n(R) \\ &= \{\, q \in Q \mid q \text{ は } R \text{ のある元から 0 回以上の } \varepsilon \text{ 遷移で到達できる} \,\}. \end{aligned}$$

実際には $E(R)$ は有限集合なので，無限個の $E_n(R)$ を計算する必要はないことに注意する．このとき，DFA $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ を

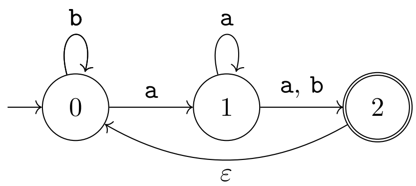
$$Q' := \mathcal{P}(Q) \quad (Q \text{ の冪集合}),$$

[4] ちなみに，Rabin と Scott は非決定性有限オートマトンを考案した功績により 1976 年に Turing 賞を受賞している．

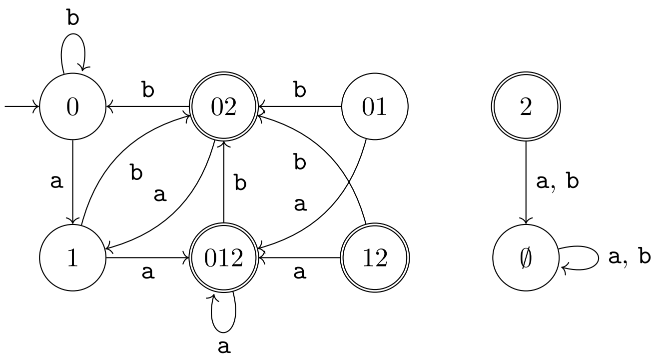
$$\begin{aligned} \delta'(R,a) &:= \bigcup_{r\in R} E(\{\, s\in Q \mid (r,a,s)\in\delta \,\}), \\ q_0' &:= E(\{q_0\}), \\ F' &:= \{\, R\subseteq Q \mid R\cap F\neq\emptyset \,\} \end{aligned}$$

と定義すると $\mathrm{L}(\mathcal{B})=\mathrm{L}(\mathcal{A})=L$ が成り立つ (下の例 2.10 も参照のこと). □

例 2.10.　アルファベット $\Sigma=\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ を固定する．NFA $\mathcal{A}$ を以下の状態遷移図で定義されるものとする．



このとき，$\mathrm{L}(\mathcal{A})=\{\, w\in\Sigma^* \mid w$ の後ろから 2 文字目が $\mathtt{a} \,\}$ であり，対応する DFA $\mathcal{B}$ は次のようになる．



幂集合構成 2.9 から特に次の決定可能性が得られる．

系 2.11 (正則言語の所属判定問題の決定可能性).　与えられた正則言語 $L\subseteq\Sigma^*$ と文字列 $w\in\Sigma^*$ が $w\in L$ をみたすかどうかを判定するアルゴリズムを構成できる．ただし，正則言語は正則文法や NFA などの形で与えられるものとする．

証明. 定理 2.9 に基づいて L を認識する DFA $\mathcal{A}$ を構成し，与えられた文字列 $w\in\Sigma^*$ が $\mathcal{A}$ に受理されるかどうかを確かめればよい． □

2.2.2　正則表現 (正規表現) と有理的部分集合

有限オートマトンを用いた正則言語の定義は直観的でわかりやすいが，込み入った定義や状態遷移図を毎回描くのは面倒である．正則文法を使えば多少楽になるものの，定義が一行に収まることは少ない．正則言語をよりコンパクトに表現するために，正則表現と呼ばれる表記法を導入する．

定義 2.12 (正則表現).　アルファベット Σ 上の**正則表現** (regular expression, 正規表現とも) は，以下のように帰納的に定義される項のことである．

(1) 空集合 $\emptyset$ は正則表現である．
(2) 各文字 $a\in\Sigma$ に対し，a は正則表現である．

(3) 空文字列 ε は正則表現である．
(4) E_1, E_2 が正則表現なら，$(E_1 \cup E_2)$ も正則表現である．(**和**)
(5) E_1, E_2 が正則表現なら，$(E_1 \cdot E_2)$ も正則表現である．(**連接**)
(6) E が正則表現なら，(E^*) も正則表現である．(**Kleene 閉包**)
(7) 以上により定義されるものだけが正則表現である．

正則表現の括弧は曖昧さを生じない範囲でなるべく省略することにする．また，連接 $E_1 \cdot E_2$ の $\cdot$ を省略して E_1E_2 とも書く．よって例えば $(\mathtt{a} \cdot (\mathtt{b} \cdot (\mathtt{b}^*)))$ と書く代わりに $\mathtt{a}(\mathtt{bb}^*)$ のように書く．正則表現 E が定める言語 $\mathrm{L}(E)$ を以下のように帰納的に定義する．

(1) $\mathrm{L}(\emptyset) := \emptyset$.
(2) $a \in \Sigma$ に対し $\mathrm{L}(a) := \{a\}$.
(3) $\mathrm{L}(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$.
(4) E_1, E_2 が正則表現のとき，$\mathrm{L}(E_1 \cup E_2) := \mathrm{L}(E_1) \cup \mathrm{L}(E_2)$.
(5) E_1, E_2 が正則表現のとき，$\mathrm{L}(E_1 \cdot E_2) := \mathrm{L}(E_1) \cdot \mathrm{L}(E_2) = \{\, uv \mid u \in \mathrm{L}(E_1), v \in \mathrm{L}(E_2) \,\}$.
(6) E が正則表現のとき，$\mathrm{L}(E^*) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}(E)^n = \{\, w_1 w_2 \cdots w_n \mid n \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ [w_i \in \mathrm{L}(E)] \,\}$.

言語 $L \subseteq \Sigma^*$ がある正則表現 E によって $L = \mathrm{L}(E)$ と表されるとき，L は Σ^* の**有理的部分集合** (rational subset) であるという[5]．

例 2.13. $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ とする．このとき，

- $\mathrm{L}(\emptyset^*) = \{\varepsilon\}$,
- $\mathrm{L}(\mathtt{aaa}^*) = \{\, \mathtt{a}^n \in \Sigma^* \mid n \geq 2 \,\}$,
- $\mathrm{L}((\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^* \mathtt{ab} (\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*) = \{\, w \in \Sigma^* \mid w$ は $\mathtt{ab}$ を含む $\}$,
- $\mathrm{L}(((\mathtt{a} \cup \mathtt{b})(\mathtt{a} \cup \mathtt{b}))^*) = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 0 \pmod 2 \,\}$.

命題 2.14. Σ 上の任意の正則表現 E に対し，$\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(G)$ となる正則文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ が存在する．

証明. 正則表現 E の構成に関する帰納法で示す．

(1) $E = \emptyset$ のとき，$V := \{S\}, P := \emptyset$ とおけば $\mathrm{L}(G) = \emptyset = \mathrm{L}(E)$ となる．
(2) $E = a \in \Sigma$ のとき，$V := \{S, A\}, P := \{S \to aA, A \to \varepsilon\}$ とおけば $\mathrm{L}(G) = \{a\} = \mathrm{L}(E)$ となる．
(3) $E = \varepsilon$ のとき，$V := \{S\}, P := \{S \to \varepsilon\}$ とおけば $\mathrm{L}(G) = \{\varepsilon\} = \mathrm{L}(E)$ となる．
(4) $E = E_1 \cup E_2$ のとき，帰納法の仮定から $\mathrm{L}(G_1) = \mathrm{L}(E_1)$，$\mathrm{L}(G_2) = \mathrm{L}(E_2)$ となる文法 $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ が存在する．このとき，文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を $V := V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, P := P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$ とおけば $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(G_1) \cup \mathrm{L}(G_2) = \mathrm{L}(E_1) \cup \mathrm{L}(E_2) = \mathrm{L}(E_1 \cup E_2)$ となる．
(5) $E = E_1 \cdot E_2$ のとき，帰納法の仮定から $\mathrm{L}(G_1) = \mathrm{L}(E_1)$，$\mathrm{L}(G_2) = \mathrm{L}(E_2)$ となる文法 $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ が存在する．このとき，$F_1 := \{\, A \in V_1 \mid A \to \varepsilon \in P_1 \,\}$ とおき，文法 $G = (V, \Sigma, P, S_1)$ を $V := V_1 \cup V_2, P := (P_1 - \{\, A \to \varepsilon \mid A \in F_1 \,\}) \cup \{\, A \to S_2 \mid A \in F_1 \,\} \cup P_2$ とおけば $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(G_1) \cdot \mathrm{L}(G_2) = \mathrm{L}(E_1) \cdot \mathrm{L}(E_2) = \mathrm{L}(E_1 \cdot E_2)$ となる．
(6) $E = E_0^*$ のとき，帰納法の仮定から $\mathrm{L}(G_0) = \mathrm{L}(E_0)$ となる文法 $G_0 = (V_0, \Sigma, P_0, S_0)$ が存在する．このとき，$F_0 := \{\, A \in V_0 \mid A \to \varepsilon \in P_0 \,\}$ とおき，文法 $G = (V_0, \Sigma, P, S_0)$ を $P := (P_0 - \{\, A \to \varepsilon \mid A \in F_0 \,\}) \cup \{\, A \to$

[5] 一般には自由モノイド Σ^* に限らないモノイドの有理的部分集合も考えることができる．(付録で扱うかもしれない．)

$S_0 \mid A \in F_0\,\} \cup \{S_0 \to \varepsilon\}$ とおけば $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(E_0^*)$ となる． □

次の定理は正則表現がすべての正則言語を表すのに十分なだけの表現力を持っていることを主張するものである．2.4.1 節で見るように，正則言語のクラスは補集合をとる操作や共通部分をとる操作で閉じているので，この定理から特に正則表現で表される言語の補集合や共通部分を表す正則表現が存在することになるが，このことは正則表現の定義からはまったく明らかではない．

定理 2.15 (Kleene). どんな NFA $\mathcal{A}$ に対しても，$\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ となる正則表現 E が存在する．

証明. **動的計画法** (dynamic programming) の考え方を利用して証明する[6]．NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ をとる．状態に番号を付けて $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ とする．以下，$i, j \in \{0, 1, \dots, n\}, k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ とする．$Q_k := \{\, q_l \in Q \mid l < k \,\}$ とおく．このとき $Q_0 = \emptyset$，$Q_{n+1} = Q$ である．以下，正則表現 $E_{i,j}^k$ を，文字列 $w \in \Sigma^*$ に対し以下の 2 条件が同値になるように帰納的に構成していく．

- $w \in \mathrm{L}(E_{i,j}^k)$，
- ある状態の有限列 $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$ $(m \geq 0)$ と $a_1, a_2, \dots, a_m \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ が存在して以下の条件をみたす．
  - $a_1 a_2 \cdots a_m = w$，
  - $r_0 = q_i$，
  - $l = 0, \dots, m-1$ に対し $(r_l, a_{l+1}, r_{l+1}) \in \delta$，
  - $r_m = q_j$，
  - $r_1, \dots, r_{m-1} \in Q_k$．

すなわち，$\mathrm{L}(E_{i,j}^k)$ は「読み込むことで，Q_k の状態だけを通って q_i から q_j へ到達できる文字列」の全体である．$k = 0$ のときは

$$E_{i,j}^0 = \begin{cases} \bigcup\{\, a \in \Sigma \mid (q_i, a, q_j) \in \delta \,\} \cup \varepsilon & (i = j \text{ のとき}), \\ \bigcup\{\, a \in \Sigma \mid (q_i, a, q_j) \in \delta \,\} & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書ける．すべての i, j に対し $E_{i,j}^k$ が定義されたとする．$w \in \mathrm{L}(E_{i,j}^{k+1})$ となるとき，対応する経路が途中で q_k を 1 回も通らないのであれば $w \in \mathrm{L}(E_{i,j}^k)$ であるし，1 回以上通るのであれば，その回数 m に応じて $w \in \mathrm{L}(E_{i,k}^k (E_{k,k}^k)^{m-1} E_{k,j}^k)$ となる．よって対応する正則表現は

$$E_{i,j}^{k+1} = E_{i,j}^k \cup E_{i,k}^k (E_{k,k}^k)^* E_{k,j}^k$$

となる．最後に，$E := \bigcup_{q_j \in F} E_{0,j}^{n+1}$ とおけば $\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ を得る． □

2.2.3 認識可能部分集合，統語モノイド，Myhill–Nerode の定理

これまで，正則言語を正則文法，NFA，正則表現といった具体的なデータにより定義する方法を見てきた．実はもう少し抽象的に，正則言語を有限モノイドの言葉を使って定義することができる．

定義 2.16 (認識可能部分集合). Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が Σ^* の**認識可能部分集合** (recognizable subset) であるとは，ある有限モノイド N と全射なモノイド準同型写像 $\pi \colon \Sigma^* \twoheadrightarrow N$ が存在して，$L = \pi^{-1}(\pi(L))$ をみたすことをいう[7]．言い換えると，Σ^* 上の同値関係 $u \sim v \;:\Longleftrightarrow\; \pi(u) = \pi(v)$ について，L が $\sim$ に関するいくつかの同値類の和集合になっているということである．

[6] 動的計画法の代わりに**一般化 NFA** (generalized NFA; GNFA) を用いて**状態消去法** (state elimination method) により証明することもできるが，実際にやっていることはほとんど同じである．

定義 2.17 (統語モノイド). $L \subseteq \Sigma^*$ を Σ 上の言語とする．L の**統語的合同関係** (syntactic congruence)[8] $\equiv_L$ とは，以下のように定義される Σ^* 上の同値関係である．

$$u \equiv_L v \;:\Longleftrightarrow\; \forall x, y \in \Sigma^* \; [xuy \in L \iff xvy \in L].$$

$\equiv_L$ が実際に同値関係の公理をみたすことは簡単に確認できる．L の統語的合同関係による商モノイド

$$\mathrm{Syn}(L) := \Sigma^*/{\equiv_L}$$

のことを L の**統語モノイド** (syntactic monoid) と呼ぶ[9]．商集合 $\Sigma^*/{\equiv_L}$ 上の積が実際に well-defined になることも簡単に確認できる．

例 2.18. $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ とする．

- $L_1 := \{\, w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 0 \pmod 2 \,\}$ とする．任意の $u, v, x, y \in \Sigma^*$ に対し，

$$\begin{aligned}
[xuy \in L_1 \iff xvy \in L_1] &\iff [|xuy| \equiv 0 \pmod 2 \iff |xvy| \equiv 0 \pmod 2] \\
&\iff |xuy| \equiv |xvy| \pmod 2 \\
&\iff |u| \equiv |v| \pmod 2
\end{aligned}$$

  となるので，統語的合同関係 $\equiv_{L_1}$ の同値類は文字列の長さの偶奇で決まる．よって $\mathrm{Syn}(L_1) = \{[\varepsilon], [\mathtt{a}]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる．

- $L_2 := \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathtt{a}} = |w|_{\mathtt{b}} \,\}$ とする．任意の $u, v, x, y \in \Sigma^*$ に対し，

$$\begin{aligned}
& [xuy \in L_2 \iff xvy \in L_2] \\
\iff & [|xuy|_{\mathtt{a}} = |xuy|_{\mathtt{b}} \iff |xvy|_{\mathtt{a}} = |xvy|_{\mathtt{b}}] \\
\iff & [|x|_{\mathtt{a}} + |u|_{\mathtt{a}} + |y|_{\mathtt{a}} = |x|_{\mathtt{b}} + |u|_{\mathtt{b}} + |y|_{\mathtt{b}} \iff |x|_{\mathtt{a}} + |v|_{\mathtt{a}} + |y|_{\mathtt{a}} = |x|_{\mathtt{b}} + |v|_{\mathtt{b}} + |y|_{\mathtt{b}}] \\
\iff & [|u|_{\mathtt{a}} - |u|_{\mathtt{b}} = |x|_{\mathtt{b}} - |x|_{\mathtt{a}} + |y|_{\mathtt{b}} - |y|_{\mathtt{a}} \iff |v|_{\mathtt{a}} - |v|_{\mathtt{b}} = |x|_{\mathtt{b}} - |x|_{\mathtt{a}} + |y|_{\mathtt{b}} - |y|_{\mathtt{a}}] \\
\iff & [|u|_{\mathtt{a}} - |u|_{\mathtt{b}} = |v|_{\mathtt{a}} - |v|_{\mathtt{b}}]
\end{aligned}$$

  となるので，統語的合同関係 $\equiv_{L_2}$ の同値類は $\mathtt{a}$ の個数と $\mathtt{b}$ の個数の差で決まる．よって $\mathrm{Syn}(L_2) = \{\ldots, [\mathtt{bb}], [\mathtt{b}], [\varepsilon], [\mathtt{a}], [\mathtt{aa}], \ldots\} \cong \mathbb{Z}$ となる．

命題 2.19. Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対し，以下の 2 条件は同値である．

(1) L は Σ^* の認識可能部分集合である．
(2) L の統語モノイド $\mathrm{Syn}(L)$ が有限モノイドである．

証明． (1) $\Longrightarrow$ (2). 仮定より存在する有限モノイド N と全射モノイド準同型写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow N$ をとる．$L = \pi^{-1}(\pi(L))$ だから，

$$\begin{aligned}
u \equiv_L v &\iff \forall x, y \in \Sigma^* \; [xuy \in L \iff xvy \in L] \\
&\iff \forall x, y \in \Sigma^* \; [xuy \in \pi^{-1}(\pi(L)) \iff xvy \in \pi^{-1}(\pi(L))] \\
&\iff \forall x, y \in \Sigma^* \; [\pi(xuy) \in \pi(L) \iff \pi(xvy) \in \pi(L)]
\end{aligned}$$

[7] 一般にモノイド準同型写像の像は終域の部分モノイドになるので，全射性は本質的な仮定ではない．
[8] 一般に，代数系の演算と**整合的** (compatible) な同値関係のことを**合同関係** (congruence relation) と呼ぶ．今の場合，$\equiv_L$ は Σ^* の演算 (連接) と整合的になっている．
[9] L の統語モノイドを $M(L)$ と書く文献も多い．

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall x, y \in \Sigma^* \, [\pi(x)\pi(u)\pi(y) \in \pi(L) \iff \pi(x)\pi(v)\pi(y) \in \pi(L)] \\
&\Longleftarrow \pi(u) = \pi(v)
\end{aligned}
$$

となるので，$|\mathrm{Syn}(L)| \leq |N| < \infty$ を得る．

(2) $\Longrightarrow$ (1). 商写像 $\pi \colon \Sigma^* \twoheadrightarrow \mathrm{Syn}(L)$ をとる．$L = \pi^{-1}(\pi(L))$ を示せばよい．$L \subseteq \pi^{-1}(\pi(L))$ は無条件に成り立つ．任意に $u \in \pi^{-1}(\pi(L))$ をとると，$\pi(u) = \pi(v)$ なる $v \in L$ が存在する．π が商写像であることより $u \equiv_L v$ つまり $\forall x, y \in \Sigma^* \, [xuy \in L \iff xvy \in L]$ であるので，特に $x = y = \varepsilon$ の場合を考えれば $u \in L \iff v \in L$ だから $u \in L$ となる． □

定理 2.20 (Myhill–Nerode の定理). 次の 2 条件が成り立つ．

(1) 任意の DFA $\mathcal{A}$ に対し，統語モノイド $\mathrm{Syn}(\mathrm{L}(\mathcal{A}))$ は有限モノイドである．

(2) Σ 上の言語 L が Σ^* の認識可能部分集合ならば，ある DFA $\mathcal{A}$ が存在して $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = L$ となる．

証明. (1) DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ をとる．各文字列 $w \in \Sigma^*$ に対し，Q から Q への写像 $f_w \in Q^Q$ を次のように定める．状態 $q \in Q$ からスタートして，w を左から順番に読み込みつつ，遷移関数 δ に従って遷移する．w を読み終えた段階で状態 r にいるならば，$f_w(q) := r$ と定義する．定義から任意の $u, v \in \Sigma^*$ に対し $f_{uv}(q) = f_v(f_u(q))$ が成り立つことがわかるので，

$$
\begin{aligned}
u \equiv_{\mathrm{L}(\mathcal{A})} v &\iff \forall x, y \in \Sigma^* \, [xuy \in \mathrm{L}(\mathcal{A}) \iff xvy \in \mathrm{L}(\mathcal{A})] \\
&\iff \forall x, y \in \Sigma^* \, [f_{xuy}(q_0) \in F \iff f_{xvy}(q_0) \in F] \\
&\iff \forall x, y \in \Sigma^* \, [f_y(f_u(f_x(q_0))) \in F \iff f_y(f_v(f_x(q_0))) \in F] \\
&\Longleftarrow f_u = f_v
\end{aligned}
$$

となる．よって $|\mathrm{Syn}(\mathrm{L}(\mathcal{A}))| \leq |Q^Q| = |Q|^{|Q|} < \infty$ を得る．

(2) 仮定より存在する有限モノイド N と全射モノイド準同型写像 $\pi \colon \Sigma^* \twoheadrightarrow N$ をとる．DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を

$$
\begin{aligned}
Q &:= N, \\
\delta(n, a) &:= n \cdot \pi(a), \\
q_0 &:= \pi(\varepsilon), \\
F &:= \pi(L)
\end{aligned}
$$

とおく．$\mathcal{A}$ において，開始状態 $q_0 = \pi(\varepsilon)$ からスタートして，文字列 $w \in \Sigma^*$ を読み終えた時点で状態 $\pi(w)$ にいることが，長さ $|w|$ に関する帰納法で簡単にわかる．よって

$$
w \in \mathrm{L}(\mathcal{A}) \iff \pi(w) \in F = \pi(L) \iff w \in \pi^{-1}(\pi(L)) = L
$$

となるので $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = L$ を得る． □

例 2.21. 定理 2.20 より，例 2.18 の L_1 は正則言語だが L_2 は正則言語ではない．

2.2.4 まとめ

ここまでの議論をまとめると，正則言語とは以下のいずれか，したがってすべての条件をみたす言語である．よって正則言語の定義としてどれを採用しても同じである．

定理 2.22.　Σ を有限アルファベットとする．言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対し，以下はすべて同値である．

(1) L はある正則文法で生成される．
(2) L はある NFA により認識される．
(3) L はある DFA により認識される．
(4) L はある正則表現で表される．
(5) L は Σ^* の有理的部分集合である．
(6) L の統語モノイド $\mathrm{Syn}(L)$ が有限モノイドである．
(7) L は Σ^* の認識可能部分集合である．

証明． 以下の図からわかる．

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{定理 } 2.7"] & (2) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{定理 } 2.9"] \arrow[d, "\text{定理 } 2.15"] & (3) \arrow[r, "\text{定理 } 2.20.(1)"] & (6) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{命題 } 2.19"] \\
(5) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{定義 } 2.12"] & (4) \arrow[ul, "\text{命題 } 2.14"'] & & (7). \arrow[ul, "\text{定理 } 2.20.(2)"']
\end{tikzcd}$$

□

2.3　文脈自由言語

文脈自由言語は文脈自由文法によって定義される言語であり，簡単な自然言語の文やプログラミング言語のソースコードを表現することができる．文脈自由言語は Muller–Schupp の定理 0.1 の重要な構成要素でもある．正則言語について，正則文法に対応する NFA という機械があったように，文脈自由文法にも対応する機械があり，**プッシュダウンオートマトン** (pushdown automaton; PDA) と呼ばれている．プッシュダウンオートマトンは NFA に加えて**スタック** (stack) と呼ばれる追加の記憶領域を持っており，そのため正則言語よりも多くの言語を認識することが可能になっている．本章では文脈自由言語の 2 つの定義，文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンが同等の表現力を持つことを見ることにする．

例 2.4 では自然言語の例を見たが，他にもいくつか例を見てみよう．

例 2.23.

- $G_1 = (V = \{S\}, \Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, P = \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon\}, S)$ とすると $\mathrm{L}(G_1) := \{\, \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0 \,\}$ となる．
- $G_2 = (V = \{S\}, \Sigma = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}, P = \{S \to \mathtt{(}S\mathtt{)}S \mid \varepsilon\}, S)$ とすると，$\mathrm{L}(G_2) = \{\varepsilon, \mathtt{()}, \mathtt{(())}, \mathtt{()()}, \ldots\}$ は左右の対応がとれた括弧の列の全体である．$\mathrm{L}(G_2)$ を (括弧が 1 種類の) **半 Dyck 言語** (semi-Dyck language) という．

2.3.1　構文木と最左導出

ここでは例 2.4 で紹介した構文木の正確な定義を行う．動機付けのための例として，文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を

$$\begin{aligned}
V &:= \{S\}, \\
\Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \\
P &:= \{S \to \varepsilon \mid SS \mid \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{b}S\mathtt{a}\}
\end{aligned}$$

と定義する．文字列 $\mathtt{abab} \in \Sigma^*$ に対し，文法 G のもとでの 2 つの導出

$$
\begin{aligned}
&S \underset{P}{\Longrightarrow} SS \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{a}S\mathtt{b}S \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{ab}S \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{aba}S\mathtt{b} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{abab}, \\
&S \underset{P}{\Longrightarrow} SS \underset{P}{\Longrightarrow} S\mathtt{a}S\mathtt{b} \underset{P}{\Longrightarrow} S\mathtt{ab} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{a}S\mathtt{bab} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{abab}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

は，生成規則の適用の順序が違うだけで，本質的には同じことをやっていると考えられる．一方で，abab の別の導出

$$
S \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{a}S\mathtt{b} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{ab}S\mathtt{ab} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{abab} \tag{2.3}
$$

は導出 (2.2) とは本質的に異なるように思われる．これらの感覚をきちんと定式化するために，文脈自由文法の導出に対応する構文木を定義する．

定義 2.24 (文脈自由文法の導出の構文木). $G = (V, \Sigma, P, S)$ を文脈自由文法とする．導出 $S = \alpha_0 \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha_1 \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha_2 \underset{P}{\Longrightarrow} \cdots \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha_n = w \in \Sigma^*$ $(\alpha_i \in (V \cup \Sigma)^*)$ をとる．G が文脈自由文法であることより，各 i について $\alpha_i = \alpha'_i A_i \alpha''_i$，$\alpha_{i+1} = \alpha'_i \beta_i \alpha''_i$ $(\alpha'_i, \alpha''_i, \beta_i \in (V \cup \Sigma)^*$，$A_i \in V$，$A_i \to \beta_i \in P)$ という形をしているとしてよい．$\mathtt{[}, \mathtt{]}$ を $V \cup \Sigma$ に含まれない文字とする．この導出に対応する**構文木** (syntax tree) または**導出木** (derivation tree) $T \in (V \cup \Sigma \cup \{\mathtt{[}, \mathtt{]}\})^*$ を次のように帰納的に定義する．

- $\alpha_n = w = w_1 w_2 \cdots w_m$ $(w_i \in \Sigma)$ に対しては $T_n := w_1 \mathtt{[]} w_2 \mathtt{[]} \cdots w_n \mathtt{[]}$ と定義する．
- $\alpha_{i+1} = \alpha'_i \beta_i \alpha''_i = \alpha'_{i,1} \cdots \alpha'_{i,m'} \beta_{i,1} \cdots \beta_{i,m} \alpha''_{i,1} \cdots \alpha''_{i,m''}$ $(\alpha'_{i,j}, \beta_{i,j}, \alpha''_{i,j} \in V \cup \Sigma)$ に対して

$$
T_{i+1} = \alpha'_{i,1} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \cdots \alpha'_{i,m'} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \beta_{i,1} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \cdots \beta_{i,m} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \alpha''_{i,1} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \cdots \alpha''_{i,m''} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]}
$$

  が定義されているとき，

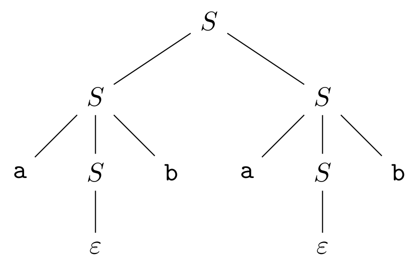
$$
T_i := \alpha'_{i,1} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \cdots \alpha'_{i,m'} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} A_i \mathtt{[} \beta_{i,1} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \cdots \beta_{i,m} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]]} \alpha''_{i,1} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]} \cdots \alpha''_{i,m''} \mathtt{[} \cdots \mathtt{]}
$$

  と定義する ($\beta_i = \varepsilon$ のときは T_i は T_{i+1} に $A_i \mathtt{[]}$ を挿入したものになることに注意)．
- $T := T_0$ とおく．

例 2.25. 導出 (2.2) に対応する構文木はどちらも

$$
T = S \mathtt{[} S \mathtt{[a[]} S \mathtt{[]b[]]} S \mathtt{[a[]} S \mathtt{[]b[]]]}
$$

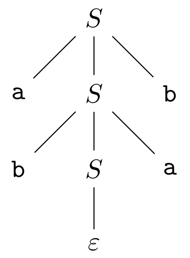
であり，実際に木の形に描くと



となる．一方，導出 (2.3) に対応する構文木は

$$
T = S \mathtt{[a[]} S \mathtt{[b[]} S \mathtt{[]a[]]b[]]}
$$

であり，実際に木の形に描くと



となる．

上で見たように，同じ構文木を与えるような導出が 2 つ以上存在することがある．それらの中で最も「標準的な」導出が次の最左導出である．

定義 2.26 (最左導出).　$G = (V, \Sigma, P, S)$ を文脈自由文法とする．文字列 $w \in \Sigma^*$ に対し，導出 $S \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w$ が**最左導出** (leftmost derivation) であるとは，導出の各段階において，最も左側にある変数が書き換えられていることをいう．形式的に書けば，導出 $S = \alpha_0 \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha_1 \underset{P}{\Longrightarrow} \cdots \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha_n = w$ が最左導出であるとは，$0 \leq i < n$ なる i について $\alpha_i = wA\beta$ $(w \in \Sigma^*, A \in V, \beta \in (V \cup \Sigma)^*)$ と表したとき，ある規則 $A \to \gamma \in P$ が存在して $\alpha_{i+1} = w\gamma\beta$ となっていることをいう．

補題 2.27.　文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ のもとで文字列 $w \in \Sigma^*$ の導出 $S \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w$ があるとき，この導出に対応する構文木を与えるような，S から w への最左導出がただ一つ存在する．

証明. まず，導出 $S \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w$ に対応する構文木 T を構成する．T の文字を左から順に読んでいき，変数に出会ったら対応する変数に生成規則を適用していくことで最左導出が得られる (構文木を図に描いたとき，根からスタートして木の左下方向へ向かって**深さ優先探索** (depth-first search) を行い，訪れた変数記号に生成規則を適用していくということもできる)．また，対応する構文木が T になるような最左導出はこれしかない．下の例 2.28 も参照のこと． □

例 2.28.　文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を

$$\begin{aligned} V &:= \{S, A\}, \\ \Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \\ P &:= \begin{cases} S \to \mathtt{b} \mid SS \mid SA, \\ A \to \varepsilon \mid \mathtt{a}A\mathtt{bb} \end{cases} \end{aligned}$$

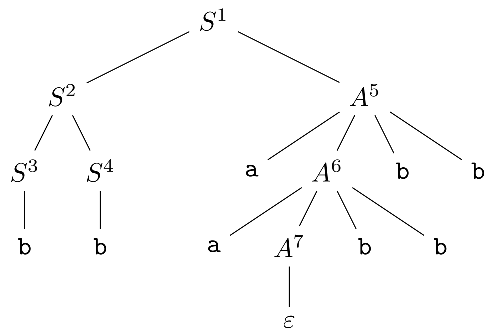
と定義する．このとき，導出

$$S \underset{P}{\Longrightarrow} SA \underset{P}{\Longrightarrow} SSA \underset{P}{\Longrightarrow} SS\mathtt{a}A\mathtt{bb} \underset{P}{\Longrightarrow} SS\mathtt{aa}A\mathtt{bbbb} \underset{P}{\Longrightarrow} SS\mathtt{aabbbb} \underset{P}{\Longrightarrow} S\mathtt{baabbbb} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{bbaabbbb}$$

に対応する構文木は

$$S[S[S[\mathtt{b}[]]S[\mathtt{b}[]]]A[\mathtt{a}[]A[\mathtt{a}[]A[]\mathtt{b}[]\mathtt{b}[]]\mathtt{b}[]\mathtt{b}[]]]$$

であり，図に描けば



であり (変数の右上の番号は深さ優先探索をしたときに頂点を訪れる順番)，これより最左導出

$$S \underset{P}{\Longrightarrow} SA \underset{P}{\Longrightarrow} SSA \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{b}SA \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{bb}A \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{bba}A\mathtt{bb} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{bbaa}A\mathtt{bbbb} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{bbaabbbb}$$

が得られる．

補題 2.27 の証明より各導出に対し，構文木と最左導出の間には一対一の対応があることがわかる．

2.3.2　Chomsky 標準形

定義 2.3 の文脈自由文法の定義では，生成規則 $\alpha \to \beta$ の右辺 $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$ には制限がなく，どんな文字列でもよいことになっている．このような無制限な文法は取り回しが悪く，扱いが難しいことが多い．そこで，より制限された扱いやすい文法として，次の Chomsky 標準形がある．

定義 2.29 (Chomsky 標準形). 文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ が **Chomsky 標準形** (Chomsky normal form) であるとは，G のどの生成規則も次のいずれかの形をしていることをいう．

(1) 変数 $A, B, C \in V$ で $B \neq S \neq C$ なるものについて $A \to BC$.
(2) 変数 $A \in V$ と終端記号 $a \in \Sigma$ について $A \to a$.
(3) 開始記号 S について $S \to \varepsilon$.

Chomsky 標準形の文法はもともとの文脈自由文法に比べて制限が強く，一見すると表現力が落ちているように思えるかもしれない．しかし，実はどんな文脈自由文法も等価な Chomsky 標準形に書き換えることができるのである．

定理 2.30. どんな文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ に対しても，Chomsky 標準形の文脈自由文法 $G' = (V', \Sigma, P', S')$ であって $\mathrm{L}(G') = \mathrm{L}(G)$ となるものを構成できる．

証明. 以下のように段階的に文法を変形していく．

(1) まず，新しい開始記号 $S' \notin V$ を用意して，$G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to S\}, S')$ とおく．このとき明らかに $\mathrm{L}(G') = \mathrm{L}(G)$ だから，これ以降 G の生成規則の右辺には開始記号 S は現れないと仮定してよい．
(2) 次に，$A \to \varepsilon$ の形の規則を除去することを考える．G の変数を $V = \{S = A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ $(n \geq 0)$ のように番号付けして，$A_i \to \varepsilon$ $(1 \leq i \leq n)$ という規則を帰納的に取り除いていく (Chomsky 標準形の定義から，$A_0 \to \varepsilon$ という規則はあってもよい)．$1 \leq i \leq n$ なる i を固定する．P には $A_j \to \varepsilon$ $(1 \leq j < i)$ の形の規則はないと仮定する (帰納法の仮定)．$A_i \to \varepsilon \notin P$ のとき，するべきことは何もない．$A_i \to \varepsilon \in P$ とする．まず，P から $A_i \to \varepsilon$ を削除したものを $P' := P - \{A_i \to \varepsilon\}$ とおく．A_i を右辺に含む規則 $A_j \to \beta \in P$ ごとに，次の操作を行う．

($\beta = A_i^n$ ($n \geq 1$) かつ $j \leq i$ のとき) $A_j \to A_i \mid A_i^2 \mid \cdots \mid A_i^n$ を P' に加える ($A_j \to \varepsilon$ は帰納法の仮定から既に削除してあるので，新たに加える必要はない).

(それ以外のとき) $\beta = \beta_0 A_i \beta_1 A_i \cdots A_i \beta_n$ ($\beta_i \in ((V - \{A_i\}) \cup \Sigma)^*$) とする．このとき，各 $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \{0,1\}^n$ に対し，規則 $A_j \to \beta_0 A_i^{e_1} \beta_1 A_i^{e_2} \cdots A_i^{e_n} \beta_n$ を P' に加える．例えば，$A_j \to \mathtt{a}A_i\mathtt{b}A_i\mathtt{a}$ という規則があったら $A_j \to \mathtt{aba} \mid \mathtt{a}A_i\mathtt{ba} \mid \mathtt{ab}A_i\mathtt{a} \mid \mathtt{a}A_i\mathtt{b}A_i\mathtt{a}$ をすべて P' に加える．$j \leq i$ なら β が A_i 以外の記号を含むことより，右辺が ε になることはないことに注意する ($j > i$ のときは右辺が ε になっても問題ない).

このとき $\mathrm{L}(G') = \mathrm{L}(G)$ が成り立つことを示す．$\mathrm{L}(G') \subseteq \mathrm{L}(G)$ であること，すなわち各文字列 $w \in \Sigma^*$ に対し $S \underset{P'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ ならば $S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ であることは簡単にわかる．逆を示す．導出 $S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ をひとつ固定する．この導出が $A_i \to \varepsilon$ という規則を用いていないならば，示すことはない．そこで，この導出が規則 $A_i \to \varepsilon$ を 1 回以上用いているとする．そのうちの 1 回に着目すると，$A_i \neq A_0 = S$ より，ある規則 $A_j \to \alpha' A_i \gamma' \in P$ ($\alpha', \gamma' \in (V \cup \Sigma)^*$) と $\alpha, \gamma, \alpha'', \gamma'' \in (V \cup \Sigma)^*$ が存在して

$$S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha A_j \gamma \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha\alpha' A_i \gamma' \gamma \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha'' A_i \gamma'' \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha'' \gamma'' \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$$

となる．このとき P' の作り方から $A_j \to \alpha' \gamma' \in P'$ なので，新たな導出

$$S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha A_j \gamma \underset{P'}{\Longrightarrow} \alpha\alpha' \gamma' \gamma \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha'' \gamma'' \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$$

が得られ，この導出 $S \underset{P \cup P'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ は規則 $A_i \to \varepsilon$ の使用回数がもとの導出より 1 つ少なくなっている．よってこの導出の変形を繰り返せば，最終的に導出 $S \underset{P'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ が得られる．以上より，これ以降 G は $A \to \varepsilon$ の形の規則を含まないとしてよい．

(3) 次に，$A \to B$ ($A, B \in V$) の形の規則を除去することを考える．V 上の二項関係 $\longrightarrow \subseteq V \times V$ を，$A, B \in V$ に対して $A \longrightarrow B \;:\Longleftrightarrow\; A \to B \in P$ と定義し，さらに前順序 $\leq \subseteq V \times V$ を $\leq := \overset{*}{\longrightarrow}$ と定義する (cf. 命題 1.2)．最初に $P' := P$ とおく．各変数 $A \in V$ に対し，次の操作を行う．

> $A \leq B$ となる変数 $B \in V$ のそれぞれに対し，次の操作を行う．
>
> > $B \to \beta \in P$ ($\beta \in (V \cup \Sigma)^*$) という形の規則のそれぞれに対し，$A \to \beta$ を P' に加える．

最後に，P' から $A \to B$ という形の規則をすべて削除する．このとき $\mathrm{L}(G') = \mathrm{L}(G)$ が成り立つことを示す．$\mathrm{L}(G') \subseteq \mathrm{L}(G)$ であること，すなわち各文字列 $w \in \Sigma^*$ に対し $S \underset{P'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ ならば $S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ であることは簡単にわかる．逆を示す．導出 $S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ をひとつ固定する．この導出が $A \to B$ という形の規則を用いていないならば，示すことはない．そこで，この導出が $A \to B$ という形の規則を 1 回以上用いているとする．そのうちの 1 回に着目すると，$B \notin \Sigma$ よりある規則 $B \to \beta$ ($\beta \in (V \cup \Sigma)^*$) と $\alpha, \gamma, \alpha', \gamma' \in (V \cup \Sigma)^*$ が存在して

$$S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha A \gamma \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha B \gamma \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha' B \gamma' \underset{P}{\Longrightarrow} \alpha' \beta \gamma' \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$$

となる．このとき P' の作り方から $A \to \beta \in P'$ なので，新たな導出

$$S \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha A \gamma \underset{P'}{\Longrightarrow} \alpha \beta \gamma \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \alpha' \beta \gamma' \underset{P}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$$

が得られ，この導出 $S \underset{P \cup P'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ は規則 $A \to B$ の使用回数がもとの導出より 1 つ少なくなっている．よってこの導出の変形を繰り返せば，最終的に導出 $S \underset{P'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ が得られる．以上より，これ以降 G は $A \to B$ の形の規則を含まないとしてよい．

(4) ここまでの変形により，G の各生成規則 $A \to \beta \in P$ は $|\beta| \geq 1$ をみたし，さらに $|\beta| = 1 \iff \beta \in \Sigma$ が成り立っている．$P' := P, V' := V$ から始めて，各規則 $A \to \beta = v_1 v_2 \cdots v_k \in P$ $(v_i \in V \cup \Sigma)$ で $k \geq 3$ なるものに対し，次の操作を行う．新たな変数 $A_1^\beta, A_2^\beta, \ldots, A_{k-2}^\beta$ をすべて V' に加え，新たな規則 $A \to v_1 A_1^\beta, A_1^\beta \to v_2 A_2^\beta, \ldots, A_{k-2}^\beta \to v_{k-1} v_k$ をすべて P' に加える．このとき，$\mathrm{L}(G') = \mathrm{L}(G)$ となることは明らかであろう．よってこれ以降，各規則 $A \to \beta \in P$ は $1 \leq |\beta| \leq 2$ をみたすとしてよい．

(5) 最後に，$A \to v_1 v_2 \in P$ の形の規則で，$v_1 \in \Sigma$ または $v_2 \in \Sigma$ となるものを除去する．$P' := P, V' := V$ から始めて，各規則 $A \to v_1 v_2 \in P$ について，$v_i \in \Sigma$ であれば U_{v_i} という新たな変数を V' に，$U_{v_i} \to v_i$ を P' に加え，さらに $A \to v_1 v_2 \in P'$ の右辺の v_i を U_{v_i} で置き換える (もとの規則は削除する)．明らかに $\mathrm{L}(G') = \mathrm{L}(G)$ であり，この G' は Chomsky 標準形である． □

例 **2.31.**　文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を

$$
\begin{aligned}
V &:= \{S, A, B\},\\
\Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\},\\
P &:= \begin{cases} S \to \varepsilon \mid AAS \mid BS, \\ A \to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{c}A\mathtt{c}, \\ B \to \varepsilon \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb} \end{cases}
\end{aligned}
$$

と定義する．この G を定理 2.30 の証明に沿って変形していく．

(1) まず，新しい開始変数 S' と規則 $S' \to S$ を追加して

$$
\begin{aligned}
S' &\to S,\\
S &\to \varepsilon \mid AAS \mid BS,\\
A &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{c}A\mathtt{c},\\
B &\to \varepsilon \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}.
\end{aligned}
$$

(2) 次に，$S \to \varepsilon$ を除去すると

$$
\begin{aligned}
S' &\to S \mid \varepsilon,\\
S &\to AAS \mid AA \mid BS \mid B,\\
A &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{c}A\mathtt{c},\\
B &\to \varepsilon \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}
\end{aligned}
$$

であり，さらに $B \to \varepsilon$ を除去すると

$$
\begin{aligned}
S' &\to S \mid \varepsilon,\\
S &\to AAS \mid AA \mid BS \mid S \mid B,\\
A &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{c}A\mathtt{c},\\
B &\to \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}.
\end{aligned}
$$

(3) 次に，$S \to B$ を除去すると

$$
\begin{aligned}
S' &\to S \mid \varepsilon,\\
S &\to AAS \mid AA \mid BS \mid S \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb},\\
A &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{c}A\mathtt{c},\\
B &\to \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}
\end{aligned}
$$

であり，さらに $S \to S$ を除去して

$$\begin{aligned} S' &\to S \mid \varepsilon, \\ S &\to AAS \mid AA \mid BS \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}, \\ A &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{c}A\mathtt{c}, \\ B &\to \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}, \end{aligned}$$

さらに $S' \to S$ を除去すると

$$\begin{aligned} S' &\to AAS \mid AA \mid BS \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb} \mid \varepsilon, \\ S &\to AAS \mid AA \mid BS \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}, \\ A &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{c}A\mathtt{c}, \\ B &\to \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}. \end{aligned}$$

(4) 新しい変数 $A_1^{AAS}, A_1^{\mathtt{b}A\mathtt{b}}, A_1^{\mathtt{c}A\mathtt{c}}$ を追加して

$$\begin{aligned} S' &\to AA_1^{AAS} \mid AA \mid BS \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb} \mid \varepsilon, \\ S &\to AA_1^{AAS} \mid AA \mid BS \mid \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}, \\ A &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A_1^{\mathtt{b}A\mathtt{b}} \mid \mathtt{c}A_1^{\mathtt{c}A\mathtt{c}}, \\ B &\to \mathtt{bc} \mid \mathtt{cb}, \\ A_1^{AAS} &\to AS, \\ A_1^{\mathtt{b}A\mathtt{b}} &\to A\mathtt{b}, \\ A_1^{\mathtt{c}A\mathtt{c}} &\to A\mathtt{c}. \end{aligned}$$

(5) 最後に，$U_\mathtt{b} \to \mathtt{b}, U_\mathtt{c} \to \mathtt{c}$ を追加して，Chomsky 標準形

$$\begin{aligned} S' &\to AA_1^{AAS} \mid AA \mid BS \mid U_\mathtt{b}U_\mathtt{c} \mid U_\mathtt{c}U_\mathtt{b} \mid \varepsilon, \\ S &\to AA_1^{AAS} \mid AA \mid BS \mid U_\mathtt{b}U_\mathtt{c} \mid U_\mathtt{c}U_\mathtt{b}, \\ A &\to \mathtt{a} \mid U_\mathtt{b}A_1^{\mathtt{b}A\mathtt{b}} \mid U_\mathtt{c}A_1^{\mathtt{c}A\mathtt{c}}, \\ B &\to U_\mathtt{b}U_\mathtt{c} \mid U_\mathtt{c}U_\mathtt{b}, \\ A_1^{AAS} &\to AS, \\ A_1^{\mathtt{b}A\mathtt{b}} &\to AU_\mathtt{b}, \\ A_1^{\mathtt{c}A\mathtt{c}} &\to AU_\mathtt{c}, \\ U_\mathtt{b} &\to \mathtt{b}, \\ U_\mathtt{c} &\to \mathtt{c} \end{aligned}$$

を得る．

Chomsky 標準形の文法を用いると，次の決定可能性が得られる．

系 2.32 (文脈自由言語の所属判定問題の決定可能性)． 与えられた文脈自由文法 G と文字列 $w \in \Sigma^*$ が $w \in \mathrm{L}(G)$ をみたすかどうかを判定するアルゴリズムを構成できる．

証明． まず，与えられた文脈自由文法 G を定理 2.30 に従って Chomsky 標準形に変形することで，$G = (V, \Sigma, P, S)$ は最初から Chomsky 標準形であると仮定してよい．$w = \varepsilon$ であれば $S \to \varepsilon \in P$ かどうかを確かめればよい．$w \neq \varepsilon$ と仮定する．仮に導出 $S \xRightarrow[P]{*} w$ が存在したとすると，G が Chomsky 標準形であることより，$A \to BC$ の形

の規則を適用すると長さが 1 だけ増え，$A \to a$ の形の規則では長さは変化しないので，$S \overset{2|w|-1}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w$ でなければならない．ここで，S から始まる長さ $2|w|-1$ の導出は有限個しか存在しないので，それらが w を生成するかどうかをチェックすればよい． □

2.3.3　プッシュダウンオートマトン

正則言語の場合には正則文法に対応する NFA という概念があったように，文脈自由文法に対応する機械の概念がプッシュダウンオートマトンである．プッシュダウンオートマトンは NFA に加えて**スタック** (stack) と呼ばれる記憶領域を持つ．スタックは**最後に入れたものが最初に出てくる** (last in, first out) データ構造であり，言うなればスーパーマーケットやコンビニエンスストアにおける買い物カゴの山のようなものである．プッシュダウンオートマトンは計算の過程でスタックの一番上 (トップ) に文字をプッシュ (積む) したりポップ (降ろす) したりすることができる．スタックは無制限の記憶容量を持つが，遷移の際には

- 入力文字列中の，次に読み込まれる (オートマトンごとにあらかじめ決められた個数の) 文字，
- スタックの上方に積まれている (オートマトンごとにあらかじめ決められた個数の) 文字

しか参照することができない．本稿では紙面の都合上，スタックを上ではなく右に伸びる文字列として表すことにする．

定義 2.33 (プッシュダウンオートマトン)． **プッシュウダウンオートマトン** (pushdown automaton; PDA) とは，以下のデータからなる 6 つ組 $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ のことである．

- 状態の有限集合 Q,
- 有限アルファベット Σ,
- 有限の**スタックアルファベット** (stack alphabet) Z[10],
- 文字列書き換え系 $\delta \subseteq Z^*Q\Sigma^* \times Z^*Q$,
- 開始状態 $q_0 \in Q$,
- 受理状態の集合 $F \subseteq Q$.

ただしここで $Z^*Q\Sigma^* := \{\, \sigma q w \mid \sigma \in Z^*, q \in Q, w \in \Sigma^* \,\}, Z^*Q := \{\, \sigma q \mid \sigma \in Z^*, q \in Q \,\}$ である．集合 $Z^*Q\Sigma^*$ の元 $\sigma q w$ を**計算状況** (configuration) または**時点表示** (instantaneous description) と呼び，PDA の動作のある時点においてスタックの内容が σ (右端がスタックトップ)，内部状態が q，入力文字列のうち未だ読み込んでいない部分が w であることを表している．文字列書き換え系 δ の各元 $(\sigma q w, \sigma' q') \in \delta$ は「入力文字列のまだ読み込んでいない部分から w を読み込み (消費し)，PDA の内部状態を q から q' に変更し，さらにスタック上方の σ をポップし，σ' をプッシュしてよい」ことを表している．

PDA $\mathcal{A}$ が**決定性プッシュダウンオートマトン** (deterministic PDA; DPDA) であるとは，関係 $\underset{\delta}{\Longrightarrow}$ が $Z^*Q\Sigma^*$ から Z^*Q への**部分関数** (partial function) であること，すなわちどんな計算状況 $\sigma q w \in Z^*Q\Sigma^*$ に対しても，$\sigma q w \underset{\delta}{\Longrightarrow} \sigma' q' w'$ となる計算状況 $\sigma' q' w' \in Z^*Q\Sigma^*$ が高々 1 つであることをいう．PDA $\mathcal{A}$ が文字列 $w \in \Sigma^*$ を**受理する** (accept) とは，ある受理状態 $q \in F$ とスタックの内容 $\sigma \in Z^*$ について

$$q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q$$

となることをいう．Σ 上の言語

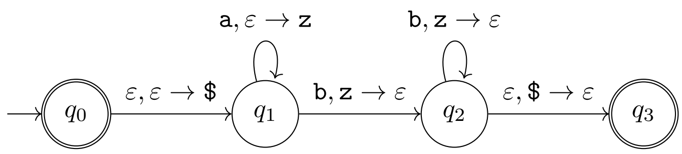
$$\mathrm{L}(\mathcal{A}) := \{\, w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ は } w \text{ を受理する} \,\}$$

のことを $\mathcal{A}$ が認識する言語という．Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が $L = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ をみたすとき，L は $\mathcal{A}$ によって認識されるという．

例 2.34. (1) PDA $\mathcal{A}_1 = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ を

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{q_0, q_1, q_2, q_3\},\\
\Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\},\\
Z &:= \{\mathtt{z}, \$\},\\
\delta &:= \{(q_0, \$q_1), (q_1\mathtt{a}, \mathtt{z}q_1), (\mathtt{z}q_1\mathtt{b}, q_2), (\mathtt{z}q_2\mathtt{b}, q_2), (\$q_2, q_3)\},\\
F &:= \{q_0, q_3\}
\end{aligned}
$$

と定義する．この $\mathcal{A}_1$ に対応する状態遷移図は次のようになる．



ここで，各元 $(\sigma q w, \sigma' q') \in \delta$ に対し，頂点 q から頂点 q' へ $w, \sigma \to \sigma'$ でラベル付けされた辺を引いている．この PDA $\mathcal{A}_1$ が認識する言語は $\mathrm{L}(\mathcal{A}_1) = \{\, \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \in \Sigma^* \mid n \geq 0 \,\}$ である．ここで，$\mathtt{aabb} \in \Sigma^*$ に対して導出

$$
\begin{aligned}
q_0\mathtt{aabb} &\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_1\mathtt{aabb}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{z}q_1\mathtt{abb}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{zz}q_1\mathtt{bb}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{z}q_2\mathtt{b}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_2\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} q_3
\end{aligned}
$$

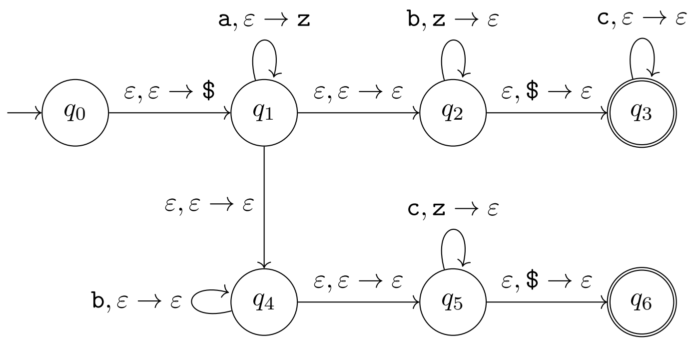
があることから，$\mathcal{A}_1$ が aabb を受理することがわかる．$\mathcal{A}_1$ は a が来たらスタックに z をプッシュして，b が来たらスタックから z をポップする．$はスタックの "底" を表す記号であり，これにより a と b が同数であるかどうかを判定している．

(2) PDA $\mathcal{A}_2 = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ を

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\},\\
\Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\},\\
Z &:= \{\mathtt{z}, \$\},\\
\delta &:= \left\{\begin{gathered}(q_0, \$q_1), (q_1\mathtt{a}, \mathtt{z}q_1), (q_1, q_2), (\mathtt{z}q_2\mathtt{b}, q_2), (\$q_2, q_3), (q_3\mathtt{c}, q_3),\\ (q_1, q_4), (q_4\mathtt{b}, q_4), (q_4, q_5), (\mathtt{z}q_5\mathtt{c}, q_5), (\$q_5, q_6)\end{gathered}\right\},\\
F &:= \{q_3, q_6\}
\end{aligned}
$$

[10] スタックアルファベットは Γ で表されることが多いが，本稿では Γ をグラフを表す文字として使いたいので，[DW17] に倣って Z を用いている．

と定義する．この $\mathcal{A}_2$ に対応する状態遷移図は次のようになる．



この PDA $\mathcal{A}_2$ が認識する言語は $\mathrm{L}(\mathcal{A}_2) = \{\, \mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \in \Sigma^* \mid i = j \vee i = k \,\}$ である．$\mathcal{A}_2$ は a と同数の z をスタックにプッシュした後，$i = j$ であるか $i = k$ であるかを非決定性を利用して "推測" し，$i = j$ だと思ったら q_2 へ遷移し，$i = k$ だと思ったら q_4 へと遷移する．ここで，aabcc $\in \Sigma^*$ に対して導出

$$
\begin{aligned}
q_0\mathtt{aabcc} &\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_1\mathtt{aabcc} \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{z}q_1\mathtt{abcc} \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{zz}q_1\mathtt{bcc} \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{zz}q_4\mathtt{bcc} \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{zz}q_4\mathtt{cc} \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{zz}q_5\mathtt{cc} \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{z}q_5\mathtt{c} \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_5 \\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} q_6
\end{aligned}
$$

があることから，$\mathcal{A}_2$ が aabcc を受理することがわかる．

注意 2.35.　NFA と DFA の場合とは異なり，PDA は DPDA よりも真に強い表現力を持っている．このことは付録??で確認する．

2.3.4　文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの等価性

ここでは文脈自由文法と PDA が同等の表現能力を持つことを証明する．まず，PDA が文脈自由文法による文字列の生成を模倣するのに十分な能力を持っていることから確認する．

定理 2.36.　どんな文脈自由文法 G に対しても，$\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \mathrm{L}(G)$ となる PDA $\mathcal{A}$ を構成することができる．

証明. 文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ に対し，PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ を

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{q_0, q_1, q_2\}, \\
Z &:= V \cup \Sigma \cup \{\$\}, \\
\delta &:= \{(q_0, \$q_1)\} \cup \{\, (q_1 a, a q_1) \mid a \in \Sigma \,\} \cup \{\, (\alpha q_1, A q_1) \mid A \to \alpha \in P \,\} \cup \{(\$Sq_1, q_2)\}, \\
F &:= \{q_2\}
\end{aligned}
$$

と定義する．

(L$(G) \subseteq$ L$(\mathcal{A})$ であること).　$w \in$ L(G) をとると，補題 2.27 と同様にして**最右導出** (rightmost derivation) $S = \beta_0 \underset{P}{\Longrightarrow} \beta_1 \underset{P}{\Longrightarrow} \cdots \underset{P}{\Longrightarrow} \beta_n = w$ がとれる．このとき各 $i = 0, 1, \ldots, n-1$ に対し，$\beta_i = \gamma_i A_i w_i$ ($\gamma_i \in (V \cup \Sigma)^*, A_i \in V, w_i \in \Sigma^*$) と書ける．導出の各段階において $A_i \to \alpha_i \in P$ という規則が適用されるとすると，$\beta_{i+1} = \gamma_{i+1} A_{i+1} w_{i+1} = \gamma_i \alpha_i w_i$ である．各 $i = n-1, \ldots, 1, 0$ に対して帰納的に $q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$\gamma_i \alpha_i q_1 w_i$ となることを示す．$i = n-1$ のときは $w = \gamma_{n-1}\alpha_{n-1}w_{n-1}$ だから

$$q_0 w \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_1 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$\gamma_{n-1}\alpha_{n-1} q_1 w_{n-1}$$

となるのでよい．$q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$\gamma_{i+1}\alpha_{i+1} q_1 w_{i+1}$ のとき，$(\alpha_i q_1, A_i q_1) \in \delta$ より

$$\$\gamma_{i+1}\alpha_{i+1} q_1 w_{i+1} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\gamma_{i+1} A_{i+1} q_1 w_{i+1}$$

ここで $\gamma_{i+1} A_{i+1} w_{i+1} = \beta_i = \gamma_i \alpha_i w_i$ かつ，最右導出であることより A_{i+1} は $\gamma_i \alpha_i$ 中に出現するから

$$\overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$\gamma_i \alpha_i q_1 w_i$$

となる．よって $i = 0$ について

$$q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$\gamma_0 \alpha_0 q_1 w_0 = \$\alpha_0 q_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$S q_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_2 \in F$$

となり，$w \in$ L$(\mathcal{A})$ を得る．

(L$(\mathcal{A}) \subseteq$ L(G) であること).　$\mathcal{A}$ が文字列 $w \in \Sigma^*$ を受理する際の導出は $\mathcal{A}$ の作り方より

$$q_0 w \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_1 w = \alpha_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \alpha_2 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \cdots \underset{\delta}{\Longrightarrow} \alpha_{n-1} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \alpha_n = \$S q_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} q_2$$

の形しかありえない．ここでモノイド準同型写像 $h\colon (Z \cup Q)^* \to Z^*$ を，Q の元と \$ を削除する写像，すなわち

$$\begin{aligned} h(A) &:= A && (A \in V \text{ のとき}), & h(a) &:= a && (a \in \Sigma \text{ のとき}), \\ h(q) &:= \varepsilon && (q \in Q \text{ のとき}), & h(\$) &:= \varepsilon \end{aligned}$$

と定める．このとき

$$S = h(\alpha_n) \overset{\le 1}{\underset{P}{\Longrightarrow}} h(\alpha_{n-1}) \overset{\le 1}{\underset{P}{\Longrightarrow}} \cdots \overset{\le 1}{\underset{P}{\Longrightarrow}} h(\alpha_2) \overset{\le 1}{\underset{P}{\Longrightarrow}} h(\alpha_1) = w$$

は G による導出 $S \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w$ を与えている．　□

例 2.37.　文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を

$$\begin{aligned} V &:= \{S, A\}, \\ \Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \\ P &:= \begin{cases} S \to \mathtt{a} \mid AS, \\ A \to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}A \end{cases} \end{aligned}$$

とするとき，定理 2.36 の証明に沿って G に対応する PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ を構成すると

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2\}, \\ Z &= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, S, A, \$\}, \\ \delta &= \{(q_0, \$q_1), (q_1\mathtt{a}, \mathtt{a}q_1), (q_1\mathtt{b}, \mathtt{b}q_1), (\mathtt{a}q_1, Sq_1), (ASq_1, Sq_1), (\mathtt{a}q_1, Aq_1), (\mathtt{b}Aq_1, Aq_1), (\$Sq_1, q_2)\}, \\ F &= \{q_2\} \end{aligned}$$

となる．このとき，G の最右導出

$$S \underset{P}{\Longrightarrow} AS \underset{P}{\Longrightarrow} AAS \underset{P}{\Longrightarrow} AA\mathtt{a} \underset{P}{\Longrightarrow} A\mathtt{b}A\mathtt{a} \underset{P}{\Longrightarrow} A\mathtt{baa} \underset{P}{\Longrightarrow} \mathtt{abaa}$$

に対応する $\mathcal{A}$ の導出は

$$\begin{aligned} q_0\mathtt{abaa} &\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$q_1\mathtt{abaa} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\mathtt{a}q_1\mathtt{baa} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$Aq_1\mathtt{baa} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$A\mathtt{b}q_1\mathtt{aa} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$A\mathtt{ba}q_1\mathtt{a} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$A\mathtt{b}Aq_1\mathtt{a} \\ &\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$AAq_1\mathtt{a} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$AA\mathtt{a}q_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$AASq_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$ASq_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$Sq_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} q_2 \end{aligned}$$

となる．

次に，PDA による文字列の受理を模倣する文脈自由文法を構成する．こちらの構成は先程よりやや複雑である．話を簡単にするために，PDA を一度に 1 文字ずつしか入力を読み込んだりスタックを操作したりできないようなものに変形できることを示しておく．

補題 2.38.　どんな PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ に対しても，PDA $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, Z, \delta', q_0, F)$ で，2 条件

- $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \mathrm{L}(\mathcal{B})$,
- $\delta' \subseteq (Q' \times Q') \cup (ZQ' \times Q') \cup (Q' \times ZQ') \cup (Q'\Sigma \times Q')$[11]

をみたすものを構成することができる．

ここで $Q' \times Q', ZQ' \times Q', Q' \times ZQ', Q'\Sigma \times Q'$ の元はそれぞれ ε 遷移，1 文字ポップする遷移，1 文字プッシュする遷移，1 文字読み込む遷移であることに注意する．

証明. PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ をとる．δ 中の各遷移を，1 文字ずつ操作する小さな遷移に分解することを考える．新たな PDA $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, Z, \delta', q_0, F)$ を

$$Q' := Q \cup \left\{ \begin{array}{c} [q^t], [z_l q^t], \ldots, [z_1 \cdots z_m q^t], \\ [z_1 \cdots z_m q^t w_1], \ldots, [z_1 \cdots z_m q w_1 \cdots w_l], \\ [y_1 \cdots y_n \bar{r}^t], \ldots, [y_n \bar{r}^t], [\bar{r}^t] \end{array} \;\middle|\; t = (z_1 \cdots z_m q w_1 \cdots w_l, y_1 \cdots y_n r) \in \delta \right\},$$

$$\delta' := \left\{ \begin{array}{c} (q, [q^t]), (z_j[z_{j+1} \cdots z_m q^t], [z_j z_{j+1} \cdots z_m q^t]), \\ ([z_1 \cdots z_m q^t w_1 \cdots w_i] w_{i+1}, [z_1 \cdots z_m q^t w_1 \cdots w_i w_{i+1}]), \\ ([z_1 \cdots z_m q^t w_1 \cdots w_l], [y_1 \cdots y_n \bar{r}^t]), \\ ([y_k y_{k+1} \cdots y_n \bar{r}^t], y_k[y_{k+1} \cdots y_n \bar{r}^t]), ([\bar{r}^t], r) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} t = (z_1 \cdots z_m q w_1 \cdots w_l, y_1 \cdots y_n r) \in \delta, \\ 1 \le j \le m,\ 0 \le i < l,\ 1 \le k \le n \end{array} \right\}$$

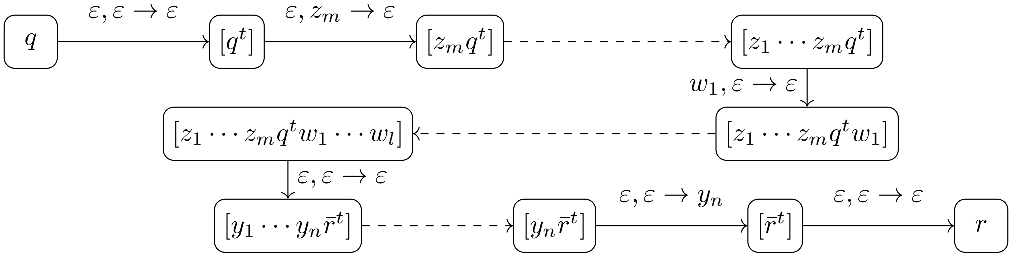
とおく．すなわち，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ における

$$q \xrightarrow{w_1 \cdots w_l,\, z_1 \cdots z_m \to y_1 \cdots y_n} r$$

---

[11] むしろ PDA の定義にこれに類似した条件を採用している文献の方が多いかもしれない．

という遷移を



という遷移の連なりに変換したものである．作り方から条件 $\delta' \subseteq (Q' \times Q') \cup (ZQ' \times Q') \cup (Q' \times ZQ') \cup (Q'\Sigma \times Q')$ は明らかに成り立っている．

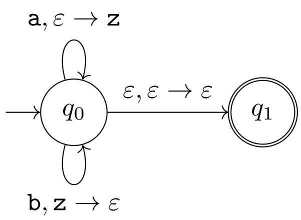
($\mathrm{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{B})$ であること) 任意に $w \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$ をとると，ある $\sigma \in Z^*$ と $q \in F$ に対し導出 $q_0 w = c_0 \underset{\delta}{\Longrightarrow} c_1 \underset{\delta}{\Longrightarrow} \cdots \underset{\delta}{\Longrightarrow} c_n = \sigma q$ $(c_i \in Z^* Q \Sigma^*)$ がとれる．このとき各 i に対し，構成から $c_i \underset{\delta}{\Longrightarrow} c_{i+1}$ ならば $c_i \overset{*}{\underset{\delta'}{\Longrightarrow}} c_{i+1}$ であるので，導出 $q_0 w \overset{*}{\underset{\delta'}{\Longrightarrow}} \sigma q$ が得られ，$w \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$ がわかる．

($\mathrm{L}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A})$ であること) 任意に $w \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$ をとると，ある $\sigma \in Z^*$ と $q \in F$ に対し導出 $q_0 w = c_0 \underset{\delta'}{\Longrightarrow} c_1 \underset{\delta'}{\Longrightarrow} \cdots \underset{\delta'}{\Longrightarrow} c_n = \sigma q$ $(c_i \in Z^* Q' \Sigma^*)$ がとれる．ここで $i < j$ について $c_i, c_j \in Z^* Q \Sigma^*$ かつ，どの $k \in \{i, i+1, \ldots, j\}$ についても $c_k \in Z^*(Q' - Q)\Sigma^*$ となっているとする．このとき δ' の定め方より，ある $t \in \delta$ が存在し，各 k について $c_k = [\sigma_k q^t w_k]$ $(\sigma_k \in Z^*, w_k \in \Sigma^*)$ という形をしている．よって $c_i \underset{\delta}{\Longrightarrow} c_j$ となるから導出 $q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q$ が得られ，$w \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$ がわかる． □

例 2.39. PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ を

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{q_0, q_1\}, \\
\Sigma &:= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \\
Z &:= \{\mathtt{z}\}, \\
\delta &:= \{t_1 = (q_0\mathtt{a}, \mathtt{z}q_0), t_2 = (\mathtt{z}q_0\mathtt{b}, q_0), t_3 = (q_0, q_1)\}, \\
F &:= \{q_1\}
\end{aligned}
$$

とおく．この $\mathcal{A}$ に対応する状態遷移図は

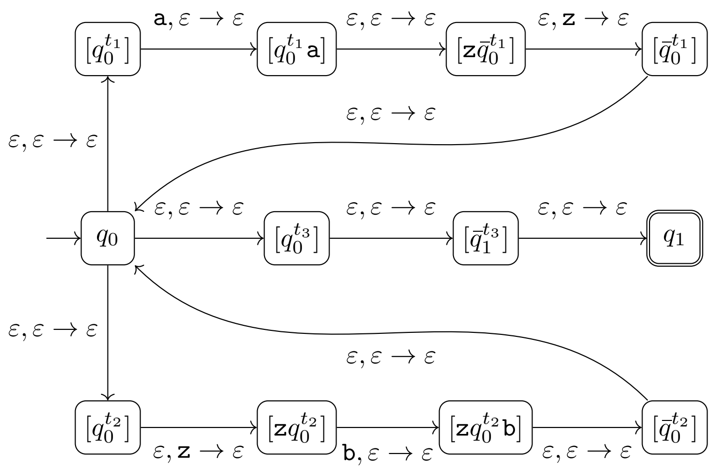


である．また，$\mathcal{A}$ が認識する言語は $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid \forall v \preccurlyeq w\ [|v|_{\mathtt{a}} \geq |v|_{\mathtt{b}}] \,\}$ である．補題 2.38 に従って PDA $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, Z, \delta', q_0, F)$ を構成すると

$$
Q' = \{q_0, q_1, [q_0^{t_1}], [q_0^{t_1}\mathtt{a}], [\mathtt{z}\bar{q}_0^{t_1}], [\bar{q}_0^{t_1}], [q_0^{t_2}], [\mathtt{z}q_0^{t_2}], [\mathtt{z}q_0^{t_2}\mathtt{b}], [\bar{q}_0^{t_2}], [q_0^{t_3}], [\bar{q}_1^{t_3}]\},
$$

$$
\delta' = \left\{
\begin{array}{c}
(q_0, [q_0^{t_1}]), ([q_0^{t_1}]\mathtt{a}, [q_0^{t_1}\mathtt{a}]), ([q_0^{t_1}\mathtt{a}], [\mathtt{z}\bar{q}_0^{t_1}]), ([\mathtt{z}\bar{q}_0^{t_1}], \mathtt{z}[\bar{q}_0^{t_1}]), ([\bar{q}_0^{t_1}], q_0), \\
(q_0, [q_0^{t_2}]), (\mathtt{z}[q_0^{t_2}], [\mathtt{z}q_0^{t_2}]), ([\mathtt{z}q_0^{t_2}]\mathtt{b}, [\mathtt{z}q_0^{t_2}\mathtt{b}]), ([\mathtt{z}q_0^{t_2}\mathtt{b}], [\bar{q}_0^{t_2}]), ([\bar{q}_0^{t_2}], q_0]), \\
(q_0, [q_0^{t_3}]), ([q_0^{t_3}], [\bar{q}_1^{t_3}]), ([\bar{q}_1^{t_3}], q_1)
\end{array}
\right\}
$$

となり，対応する状態遷移図は



となる．

証明を簡潔にするために，もう一つだけ簡単な変形を施しておく．

補題 2.40.　どんな PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ に対しても，PDA $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, Z, \delta', q_0, F')$ で，4 条件

- $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \mathrm{L}(\mathcal{B})$,
- $\delta' \subseteq (Q' \times Q') \cup (ZQ' \times Q') \cup (Q' \times ZQ') \cup (Q'\Sigma \times Q')$
- 受理状態がただ一つ，すなわちある状態 $q_{\mathrm{accept}} \in Q$ について $F' = \{q_{\mathrm{accept}}\}$,
- 入力を受理するならばスタックが空の状況で受理できる，つまり $\mathrm{L}(\mathcal{B}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} q_{\mathrm{accept}} \,\}$

をみたすものを構成することができる．

証明． 補題 2.38 より $\mathcal{A}$ は前半の 2 条件をみたすとしてよい．このとき PDA $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, Z, \delta', q_0, F')$ を

$$
\begin{aligned}
Q' &:= Q \cup \{q_{\mathrm{accept}}\} \quad (\text{ただし } q_{\mathrm{accept}} \notin Q),\\
\delta' &:= \delta \cup \{\, (q, q_{\mathrm{accept}}) \mid q \in F \,\} \cup \{\, (zq_{\mathrm{accept}}, q_{\mathrm{accept}}) \mid z \in Z \,\},\\
F' &:= \{q_{\mathrm{accept}}\}
\end{aligned}
$$

とおけば，$\mathcal{B}$ は所望の条件をみたす．□

それでは定理の証明に入ろう．

定理 2.41.　どんな PDA $\mathcal{A}$ に対しても，$\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ となる文脈自由文法 G を構成することができる．

証明． 補題 2.40 より，PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F)$ は

- $\delta \subseteq (Q \times Q) \cup (ZQ \times Q) \cup (Q \times ZQ) \cup (Q\Sigma \times Q)$,
- 受理状態がただ一つ，すなわちある状態 $q_{\mathrm{accept}} \in Q$ について $F = \{q_{\mathrm{accept}}\}$,
- 入力を受理するならばスタックが空の状況で受理できる，つまり $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} q_{\mathrm{accept}} \,\}$

という条件をみたすとしてよい．文脈自由文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ を

$$V := \{\, A_{p,q} \mid p, q \in Q \,\},$$

$$
\begin{aligned}
P := &\{\, A_{p,p} \to \varepsilon \mid p \in Q \,\} \cup \{\, A_{p,q} \to A_{p,r}A_{r,q} \mid p,q,r \in Q \,\}\\
&\cup \{\, A_{p,q} \to \varepsilon \mid p,q \in Q, (p,q) \in \delta \,\}\\
&\cup \{\, A_{p,q} \to A_{r,s} \mid p,q,r,s \in Q, z \in Z, (p,zr),(zs,q) \in \delta \,\}\\
&\cup \{\, A_{p,q} \to aA_{r,q} \mid p,q,r \in Q, a \in \Sigma, (pa,r) \in \delta \,\},\\
S := &A_{q_0,q_{\mathrm{accept}}}
\end{aligned}
$$

と定義する．P は明らかに有限集合であることに注意する．この文法は次の条件をみたすように定義されている．

主張 2.42.　各変数 $A_{p,q} \in V$ と文字列 $w \in \Sigma^*$ に対し，

$$\left[A_{p,q} \xRightarrow[P]{*} w\right] \iff \left[pw \xRightarrow[\delta]{*} q\right].$$

証明. ($\Longrightarrow$) 導出 $A_{p,q} \xRightarrow[P]{*} w$ の長さに関する帰納法で示す．$A_{p,q} \xRightarrow[P]{} w$ のとき，P の定め方から $p = q$ かつ $w = \varepsilon$，または $(p,q) \in \delta$ かつ $w = \varepsilon$ しかありえないので，前者ならば $pw = p \xRightarrow[\delta]{0} p = q$，後者ならば $pw = p \xRightarrow[\delta]{1} q$ である．$A_{p,q} \xRightarrow[P]{} A_{p,r}A_{r,q} \xRightarrow[P]{*} w$ のとき，$A_{p,r} \xRightarrow[P]{*} w_1, A_{r,q} \xRightarrow[P]{*} w_2$ となるような分割 $w = w_1w_2$ がある．よって帰納法の仮定より $pw_1 \xRightarrow[\delta]{*} r, rw_2 \xRightarrow[\delta]{*} q$ となるので $pw = pw_1w_2 \xRightarrow[\delta]{*} rw_2 \xRightarrow[\delta]{*} q$ を得る．次に $A_{p,q} \xRightarrow[P]{} A_{r,s} \xRightarrow[P]{*} w$ のとき，P の定義から $(p,zr),(zs,q) \in \delta$ となるような $z \in Z$ がとれる．よって帰納法の仮定から $rw \xRightarrow[\delta]{*} s$ であるので $pw \xRightarrow[\delta]{} zrw \xRightarrow[\delta]{*} zs \xRightarrow[\delta]{} q$ を得る．最後に $A_{p,q} \xRightarrow[P]{} aA_{r,q} \xRightarrow[P]{*} w$ $(a \in \Sigma, (pa,r) \in \delta)$ のとき，$w = aw'$ とすると帰納法の仮定より $rw' \xRightarrow[\delta]{*} q$ であるので $pw = paw' \xRightarrow[\delta]{} rw' \xRightarrow[\delta]{*} q$ を得る．

($\Longleftarrow$) 導出 $pw \xRightarrow[\delta]{*} q$ の長さに関する帰納法で示す．長さが 0 のときは $pw = q$ より $p = q, w = \varepsilon$ しかありえないから $A_{p,q} = A_{p,p} \xRightarrow[P]{} \varepsilon = w$ よりよい．長さが 1 以上のとき，導出 $pw \xRightarrow[\delta]{*} q$ において pw に最初に適用される δ の規則によって場合分けする．pw はスタックが空の計算状況であるから，δ に関する仮定と合わせて，以下の 3 通りのいずれかになる．

- **($(p,r) \in \delta$ の形のとき)** $pw \xRightarrow[\delta]{} rw \xRightarrow[\delta]{*} q$ であるから，帰納法の仮定より $A_{r,q} \xRightarrow[P]{*} w$ である．$(p,r) \in \delta$ から $A_{p,r} \to \varepsilon \in P$ であることと合わせて $A_{p,q} \xRightarrow[P]{} A_{p,r}A_{r,q} \xRightarrow[P]{} A_{r,q} \xRightarrow[P]{*} w$ を得る．
- **($(p,zr) \in \delta$ の形のとき)** $pw \xRightarrow[\delta]{} zrw \xRightarrow[\delta]{*} q$ となっているが，ここで q はスタックが空の計算状況であるから，最初にスタックの底にプッシュされた z が初めてポップされる瞬間がなければならない．よってその瞬間に適用される規則を $(zs,q') \in \delta$ とすると，ある分解 $w = uv$ について $pw \xRightarrow[\delta]{} zrw = zruv \xRightarrow[\delta]{*} zsv \xRightarrow[\delta]{} q'v \xRightarrow[\delta]{*} q$ となる．$zsv \xRightarrow[\delta]{} q'v$ が z が初めてポップされる瞬間であることより，$ru \xRightarrow[\delta]{*} s$ が成り立つ (一般には $zruv \xRightarrow[\delta]{*} zsv$ であるからといって $ruv \xRightarrow[\delta]{*} sv$ とは限らないことに注意)．よって帰納法の仮定より $A_{r,s} \xRightarrow[P]{*} u$ かつ $A_{q',q} \xRightarrow[P]{*} v$ であるので $A_{p,q} \xRightarrow[P]{} A_{p,q'}A_{q',q} \xRightarrow[P]{} A_{r,s}A_{q',q} \xRightarrow[P]{*} uA_{q',q} \xRightarrow[P]{*} uv = w$ を得る．
- **($(pa,r) \in \delta$ の形のとき)** $w = aw'$ $(a \in \Sigma, w' \in \Sigma^*)$ の形に分解でき，$pw = paw' \xRightarrow[\delta]{} rw' \xRightarrow[\delta]{*} q$ となっている．よって帰納法の仮定より $A_{r,q} \xRightarrow[P]{*} w'$ であるので $A_{p,q} \xRightarrow[P]{} aA_{r,q} \xRightarrow[P]{*} aw' = w$ を得る．　□

よって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid A_{q_0,q_{\mathrm{accept}}} \xRightarrow[P]{*} w \,\} && (S = A_{q_0,q_{\mathrm{accept}}} \text{ より})\\
&= \{\, w \in \Sigma^* \mid q_0 w \xRightarrow[\delta]{*} q_{\mathrm{accept}} \,\} && (\text{主張 } 2.42 \text{ より})
\end{aligned}
$$

$$= \mathrm{L}(\mathcal{A}) \qquad (\mathcal{A} \text{ に関する最初の仮定より})$$

となる． □

以上をまとめると，次の系が得られる．

系 2.43. Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対し，以下の 2 条件は同値である．

(1) L はある文脈自由文法によって生成される．

(2) L はある PDA によって認識される．

証明． 定理 2.36 と定理 2.41 より． □

2.4 言語クラスの閉包性

これまで，個別の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が正則言語であるとか文脈自由言語であるとかいった条件について調べてきた．ここでは個々の言語ではなく，「正則言語全体のクラス」や「文脈自由言語全体のクラス」などが持つ性質を調べる．特に「言語クラス $\mathcal{L}$ に属す言語 L にある特定の操作を施して得られる言語が再び $\mathcal{L}$ に属す」という種類の性質 (閉包性) について考察する．

定義 2.44. 正則言語全体のクラス，文脈自由言語全体のクラスをそれぞれ記号 REG, CFL で表す．すなわち

$$\mathsf{REG} = \{\, L \mid \exists\Sigma\, [\Sigma \text{ は有限アルファベット} \wedge L \subseteq \Sigma^* \wedge L \text{ は正則言語}] \,\},$$
$$\mathsf{CFL} = \{\, L \mid \exists\Sigma\, [\Sigma \text{ は有限アルファベット} \wedge L \subseteq \Sigma^* \wedge L \text{ は文脈自由言語}] \,\}$$

である[12]．定義より REG $\subseteq$ CFL が成り立っている．

2.4.1 Boole 演算と正則演算

言語に対する操作として，まず Boole 演算と連接，Kleene 閉包について調べよう．Boole 演算は和集合・共通部分・補集合という 3 つの操作からなる．**正則演算** (regular operations) とは，正則表現の定義 2.12 に現れる和集合・連接・Kleene 閉包の 3 つを指す．すなわち，次のように定義される操作である．

定義 2.45 (連接，Kleene 閉包). $L_1, L_2, L \subseteq \Sigma^*$ を言語とするとき，

- L_1 と L_2 の**連接** (concatenation) を $L_1 \cdot L_2 := \{\, uv \mid u \in L_1, v \in L_2 \,\}$,
- L の **Kleene 閉包** (Kleene closure, Kleene star) を $L^* := \{\, w_1 w_2 \cdots w_n \mid n \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ [w_i \in L] \,\}$[13]

と定義する．

まず正則言語のクラス REG について述べる．REG は非常に性質がよいクラスであり，実際，上で挙げたすべての操作について閉じている．

[12] これら REG, CFL は Σ のとり方に制限がないため真のクラスになるが，必要ならアルファベットを $\Sigma \subseteq \mathbb{N}$ に制限することにより，REG, CFL を集合であると考えてもよい．

[13] Kleene 閉包 L^* は L によって生成される Σ^* の部分モノイドに一致する．

定理 2.46.　正則言語のクラス REG について，以下が成り立つ．

(1) REG は和集合について閉じている．すなわち，$L_1, L_2 \in \mathsf{REG}$ かつ $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ならば $L_1 \cup L_2 \in \mathsf{REG}$ である．
(2) REG は共通部分について閉じている．すなわち，$L_1, L_2 \in \mathsf{REG}$ かつ $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ならば $L_1 \cap L_2 \in \mathsf{REG}$ である．
(3) REG は補集合について閉じている．すなわち，$L \in \mathsf{REG}$ かつ $L \subseteq \Sigma^*$ ならば $\Sigma^* - L \in \mathsf{REG}$ である．
(4) REG は連接について閉じている，すなわち $L_1, L_2 \in \mathsf{REG}$ かつ $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ならば $L_1 \cdot L_2 \in \mathsf{REG}$ である．
(5) REG は Kleene 閉包について閉じている，すなわち $L \in \mathsf{REG}$ かつ $L \subseteq \Sigma^*$ ならば $L^* \in \mathsf{REG}$ である．

証明． (1)，(4)，(5) について，$L_1, L_2, L \subseteq \Sigma^*$ を正則言語とすると，ある正則表現 E_1, E_2, E によって $L_1 = \mathrm{L}(E_1), L_2 = \mathrm{L}(E_2), L = \mathrm{L}(E)$ と表せる．よって $L_1 \cup L_2 = \mathrm{L}(E_1) \cup \mathrm{L}(E_2) = \mathrm{L}(E_1 \cup E_2) \in \mathsf{REG}$，$L_1 \cdot L_2 = \mathrm{L}(E_1) \cdot \mathrm{L}(E_2) = \mathrm{L}(E_1 \cdot E_2) \in \mathsf{REG}$，$L^* = \mathrm{L}(E)^* = \mathrm{L}(E^*) \in \mathsf{REG}$ を得る．
(3) を示す．$L \subseteq \Sigma^*$ を正則言語とすると，$L = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ となる DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ がとれる．このとき DFA $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ を $F' := Q - F$ とおけば $\Sigma^* - L = \Sigma^* - \mathrm{L}(\mathcal{A}) = \mathrm{L}(\mathcal{B}) \in \mathsf{REG}$ を得る．
(2) は (1)，(3) と de Morgan の法則からわかる． □

文脈自由言語のクラスは正則演算 (和集合・連接・Kleene 閉包) についてのみ閉じている．CFL が共通部分と補集合について閉じていないことは付録**??**で見る．

定理 2.47.　文脈自由言語のクラス CFL について，以下が成り立つ．

(1) CFL は和集合について閉じている．すなわち，$L_1, L_2 \in \mathsf{CFL}$ かつ $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ならば $L_1 \cup L_2 \in \mathsf{CFL}$ である．
(2) CFL は連接について閉じている，すなわち $L_1, L_2 \in \mathsf{CFL}$ かつ $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ならば $L_1 \cdot L_2 \in \mathsf{CFL}$ である．
(3) CFL は Kleene 閉包について閉じている，すなわち $L \in \mathsf{CFL}$ かつ $L \subseteq \Sigma^*$ ならば $L^* \in \mathsf{CFL}$ である．

証明． $L_1, L_2, L \subseteq \Sigma^*$ を文脈自由言語とすると，$L_1 = \mathrm{L}(G_1), L_2 = \mathrm{L}(G_2), L = \mathrm{L}(G)$ となる文脈自由文法 $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1), G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2), G = (V, \Sigma, P, S)$ がとれる．$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ と仮定してよい．

(1) 文脈自由文法 $G_\cup = (V_\cup, \Sigma, P_\cup, S_\cup)$ を

$$\begin{aligned} V_\cup &:= V_1 \cup V_2 \cup \{S_\cup\} \quad (\text{ただし } S_\cup \notin V_1 \cup V_2), \\ P_\cup &:= P_1 \cup P_2 \cup \{S_\cup \to S_1 \mid S_2\} \end{aligned}$$

とおけば $L_1 \cup L_2 = \mathrm{L}(G_1) \cup \mathrm{L}(G_2) = \mathrm{L}(G_\cup) \in \mathsf{CFL}$ を得る．

(2) 文脈自由文法 $G_\bullet = (V_\bullet, \Sigma, P_\bullet, S_\bullet)$ を

$$\begin{aligned} V_\bullet &:= V_1 \cup V_2 \cup \{S_\bullet\} \quad (\text{ただし } S_\bullet \notin V_1 \cup V_2), \\ P_\bullet &:= P_1 \cup P_2 \cup \{S_\bullet \to S_1 S_2\} \end{aligned}$$

とおけば $L_1 \cdot L_2 = \mathrm{L}(G_1) \cdot \mathrm{L}(G_2) = \mathrm{L}(G_\bullet) \in \mathsf{CFL}$ を得る．

(3) 文脈自由文法 $G_* = (V_*, \Sigma, P_*, S_*)$ を

$$\begin{aligned} V_* &:= V \cup \{S_*\} \quad (\text{ただし } S_* \notin V_1 \cup V_2), \\ P_* &:= P \cup \{S_* \to \varepsilon \mid S S_*\} \end{aligned}$$

とおけば $L^* = \mathrm{L}(G)^* = \mathrm{L}(G_*) \in \mathsf{CFL}$ を得る． □

2.4.2 モノイド準同型による像と逆像

2 つの言語 $L_1 \subseteq \Sigma^*, L_2 \subseteq \Delta^*$ に対し，モノイド準同型 $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ は L_1 の像 $h(L_1) = \{\, h(w) \mid w \in L_1 \,\} \subseteq \Delta^*$ と L_2 の逆像 $h^{-1}(L_2) = \{\, w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L_2 \,\} \subseteq \Sigma^*$ という 2 つの言語を定める．ここでは，正則言語のクラス REG と文脈自由言語のクラス CFL がこれら 2 つの操作について閉じていることを確かめる．5 章以降で群の語の問題を考える際に，逆像をとる操作で閉じた言語クラスを考えることが重要になる．

例 2.48. $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \Delta := \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$ とし，$h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ を $h(\mathtt{a}) := \mathtt{()}, h(\mathtt{b}) := \mathtt{)(}, h(\mathtt{c}) := \varepsilon$ と定義する．$L_1 := \mathrm{L}((\mathtt{acbc})^*) \subseteq \Sigma^*$ とし $L_2 \subseteq \Delta^*$ を例 2.23 の semi-Dyck 言語とする．このとき，$h(L_1) = \mathrm{L}((\mathtt{()\,)(})^*), h^{-1}(L_2) = \mathrm{L}((a \cup c)^*)$ となる[14]．

モノイド準同型の像をとる操作で閉じていることは，文法を用いて簡単に証明することができる．

定理 2.49. 正則言語のクラス REG と文脈自由言語のクラス CFL はモノイド準同型の像をとる操作で閉じている (closed under homomorphism)．すなわち言語クラス $\mathcal{L} \in \{\mathsf{REG}, \mathsf{CFL}\}$ について，$L \in \mathcal{L}$ かつ $L \subseteq \Sigma^*$ でさらに $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ がモノイド準同型ならば $h(L) \in \mathcal{L}$ である．

証明． $i \in \{2, 3\}$ をとり，言語 $L \subseteq \Sigma^*$ を生成する i 型文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ をとる (i 型文法については定義 2.3 を見よ)．モノイド準同型写像 $\tilde{h}\colon (V \cup \Sigma)^* \to (V \cup \Delta)^*$ を

$$\begin{aligned} \tilde{h}(A) &:= A && (A \in V \text{ のとき}), \\ \tilde{h}(a) &:= h(a) && (a \in \Sigma \text{ のとき}) \end{aligned}$$

と定義する．このとき，文法 $G' = (V, \Delta, P', S)$ を $P' := \{\, A \to \tilde{h}(\alpha) \mid A \to \alpha \in P \,\}$ とおくと G' も i 型文法であり，$h(L) = h(\mathrm{L}(G)) = \mathrm{L}(G')$ であることが容易にわかる． □

次に，逆像をとる操作で閉じていることを示す．まず，簡単な正則言語の場合から証明する．

定理 2.50. 正則言語のクラス REG はモノイド準同型の逆像をとる操作で閉じている (closed under inverse homomorphism)．すなわち，$L \in \mathsf{REG}$ かつ $L \subseteq \Delta^*$ でさらに $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ がモノイド準同型ならば $h^{-1}(L) \in \mathsf{REG}$ である．

証明． $L = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ となる DFA $\mathcal{A} = (Q, \Delta, \delta, q_0, F)$ をとる．遷移関数 $\delta\colon Q \times \Delta \to Q$ を以下のように拡張して $\hat{\delta}\colon Q \times \Delta^* \to Q$ を定める[15]．

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \varepsilon) &:= q && (q \in Q), \\ \hat{\delta}(q, bv) &:= \hat{\delta}(\delta(q, b), v) && (q \in Q, b \in \Delta, v \in \Delta^*). \end{aligned}$$

このとき，DFA $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ を $\delta'(q, a) := \hat{\delta}(q, h(a))$ と定めると $h^{-1}(L) = h^{-1}(\mathrm{L}(\mathcal{A})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}) \in \mathsf{REG}$ を得る． □

文脈自由言語の場合には状態だけでなくスタックの内容も考慮する必要があるため，証明はもう少し複雑である．

[14] $h^{-1}(L_2)$ の元が b を含みえないことは，例えば L_2 の元は括弧列を左側から 1 文字ずつ読んでいったときに常に ((の個数) $\geq$ () の個数) をみたすことからわかる．

[15] この $\hat{\delta}(q, v)$ は Myhill–Nerode の定理 2.20.(1) の証明で定義した $f_v(q)$ と同じものである．

定理 2.51.　文脈自由言語のクラス CFL はモノイド準同型の逆像をとる操作で閉じている．すなわち，$L \in \mathsf{CFL}$ かつ $L \subseteq \Delta^*$ でさらに $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ がモノイド準同型ならば $h^{-1}(L) \in \mathsf{CFL}$ である．

証明． $L = \mathrm{L}(\mathcal{A})$ となる PDA $\mathcal{A} = (Q, \Delta, Z, \delta, q_0, F)$ をとる．補題 2.38 より $\delta \subseteq (Q \times Q) \cup (ZQ \times Q) \cup (Q \times ZQ) \cup (Q\Delta \times Q)$ が成り立つと仮定してよい．自然数 $c := \max\{\, h(a) \mid a \in \Sigma \,\}$ をとり，$\Delta^{\leq c} := \bigcup_{k \leq c} \Delta^k$ とおく．ここで PDA $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, Z, \delta', q'_0, F')$ を

$$
\begin{aligned}
Q' &:= Q \times \Delta^{\leq c},\\
\delta' &:= \{\, ((q,\varepsilon)a, (q, h(a))) \mid q \in Q, a \in \Sigma \,\}\\
&\quad \cup \{\, (\sigma(q, vv'), \sigma'(q', v')) \mid \sigma \in Z \cup \{\varepsilon\}, q, q' \in Q, v \in \Delta \cup \{\varepsilon\}, vv' \in \Delta^{\leq c}, (\sigma q v, \sigma' q') \in \delta \,\},\\
q'_0 &:= (q_0, \varepsilon),\\
F' &:= Q \times \{\varepsilon\}
\end{aligned}
$$

とおく．$\mathcal{B}$ は入力文字列 $w \in \Sigma^*$ に対し，$\mathcal{A}$ の入力 $h(w) \in \Delta^*$ に対する動作を模倣する．ただし，一般に文字 $a \in \Sigma$ に対し $h(a) \in \Delta^*$ は 2 文字以上になりうるので，一旦 $h(a)$ を状態 $(q, h(a)) \in Q'$ として記憶しておき，$h(a)$ から 1 文字ずつ読み込むことにより $\mathcal{A}$ の動作を模倣する．つまり，$\Delta^{\leq c}$ は $h(a)$ を一時保存しておくためのバッファー (buffer) である．

($h^{-1}(\mathrm{L}(\mathcal{A})) \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{B})$ であること) 入力文字列を $w = a_1 \cdots a_n a_{n+1} \in \Sigma^*$ $(n \geq 0, a_i \in \Sigma, a_{n+1} = \varepsilon)$，それらの像を $h(a_i) = b_{i,1} \cdots b_{i,l(i)}$ $(l(i) \geq 0, b_{i,j} \in \Delta)$ とする．このとき $\sigma \in Z^*, q \in Q, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq l(i)$ であれば

$$
\left[q_0 h(w) \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q b_{i,j} \cdots b_{i,l(i)} h(a_{i+1}) \cdots h(a_{n+1}) \right] \implies \left[(q_0, \varepsilon) w \overset{*}{\underset{\delta'}{\Longrightarrow}} \sigma (q, b_{i,j} \cdots b_{i,l(i)}) a_{i+1} \cdots a_{n+1} \right]
$$

となることを，導出 $q_0 h(w) \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q b_{i,j} \cdots b_{i,l(i)} h(a_{i+1}) \cdots h(a_{n+1})$ の長さに関する帰納法で示す．長さ 0 のときは $(q_0, \varepsilon) w \underset{\delta'}{\Longrightarrow} (q_0, b_{1,1} \cdots b_{1,l(1)}) a_2 \cdots a_{n+1}$ よりよい．長さ 1 以上のとき，最後に用いられた書き換え規則が入力文字列を消費したかどうかで場合分けする．

($\delta \cap ((Q \times Q) \cup (Q \times ZQ) \cup (ZQ \times Q))$ の元とき) このとき導出は

$$
q_0 h(w) \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q b_{i,j} \cdots b_{i,l(i)} h(a_{i+1}) \cdots h(a_{n+1}) \underset{\delta}{\Longrightarrow} \sigma' q' b_{i,j} \cdots b_{i,l(i)} h(a_{i+1}) \cdots h(a_{n+1})
$$

という形をしているので，帰納法の仮定と合わせて

$$
q_0 w \overset{*}{\underset{\delta'}{\Longrightarrow}} \sigma (q, b_{i,j} \cdots b_{i,l(i)}) a_{i+1} \cdots a_{n+1} \underset{\delta'}{\Longrightarrow} \sigma' (q', b_{i,j} \cdots b_{i,l(i)}) a_{i+1} \cdots a_{n+1}
$$

を得る．

($\delta \cap (Q\Delta \times Q)$ の元とき) このとき，導出が $j < l(i)$ について

$$
q_0 h(w) \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q b_{i,j} b_{i,j+1} \cdots b_{i,l(i)} h(a_{i+1}) \cdots h(a_{n+1}) \underset{\delta}{\Longrightarrow} \sigma q' b_{i,j+1} \cdots b_{i,l(i)} h(a_{i+1}) \cdots h(a_{n+1})
$$

という形をしているならば，帰納法の仮定と合わせて

$$
q_0 w \overset{*}{\underset{\delta'}{\Longrightarrow}} \sigma (q, b_{i,j} b_{i,j+1} \cdots b_{i,l(i)}) a_{i+1} \cdots a_{n+1} \underset{\delta'}{\Longrightarrow} \sigma (q', b_{i,j+1} \cdots b_{i,l(i)}) a_{i+1} \cdots a_{n+1}
$$

となり，$j = l(i)$ のときは

$$
\begin{aligned}
q_0 h(w) &\overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q b_{i,l(i)} b_{i+1,1} \cdots b_{i+1,l(i+1)} h(a_{i+2}) \cdots h(a_{n+1})\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \sigma q' b_{i+1,1} \cdots b_{i+1,l(i+1)} h(a_{i+2}) \cdots h(a_{n+1})
\end{aligned}
$$

という形だから，帰納法の仮定と合わせて

$$\begin{aligned} q_0 w &\overset{*}{\underset{\delta'}{\Longrightarrow}} \sigma(q, b_{i,l(i)}) a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_{n+1} \underset{\delta'}{\Longrightarrow} \sigma(q', \varepsilon) a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_{n+1} \\ &\underset{\delta'}{\Longrightarrow} \sigma(q', b_{i+1,1} \cdots b_{i+1,l(i+1)}) a_{i+2} \cdots a_{n+1} \end{aligned}$$

を得る．

($\mathrm{L}(\mathcal{B}) \subseteq h^{-1}(\mathrm{L}(\mathcal{A}))$ であること) δ' の定め方から，どんな $\sigma \in Z^*, q \in Q, v \in \Delta^{\leq c}, u \in \Sigma^*$ に対しても

$$\left[(q_0, \varepsilon) w \overset{*}{\underset{\delta'}{\Longrightarrow}} \sigma(q, v) u \right] \implies \left[q_0 h(w) \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \sigma q v h(u) \right]$$

が成り立つことが (導出の長さに関する帰納法で) 容易にわかるのでよい．

以上より $h^{-1}(L) = h^{-1}(\mathrm{L}(\mathcal{A})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}) \in \mathsf{CFL}$ を得る．　□

第 II 部

群

第 3 章

群論再入門

本章では次章以降で用いる群の定義や基本性質について簡単に復習する．

3.1　群に関する用語と記法

まず，群の定義や関連する記法を列挙する．本節はあくまで本稿で用いる記号を定義するだけなので，証明は基本的にすべて省略している．

3.1.1　群と部分群

群 (group) とは集合 G とその上の二項演算 $\circ\colon G\times G\to G$ と単項演算 $(\text{–})^{-1}\colon G\to G$，元 $1_G\in G$ の 4 つ組 $(G,\circ,(\text{–})^{-1},1_G)$ であって以下の条件をみたすものであった[1]．

(結合律) $\forall x,y,z\in G\ [(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)]$.
(単位元) $\forall x\in G\ [x\circ 1_G = 1_G\circ x = x]$.
(逆元) $\forall x\in G\ [x\circ x^{-1} = x^{-1}\circ x = 1_G]$.

文脈上演算が明らかなときは群を $(G,\circ,(\text{–})^{-1},1_G)$ と書く代わりに単に G で表し，演算についても $x\circ y$ を単に xy で表す．**アーベル群** (abelian group) の場合には $\circ,(\text{–})^{-1},1_G$ の代わりに $+,-(\text{–}),0_G$ などと書くこともある．

群 $(G,\circ,(\text{–})^{-1},1_G)$ の**部分群** (subgroup) とは，部分集合 $H\subseteq G$ であって G と同じ演算について群になるもののことをいう．正確には，ある部分集合 $H\subseteq G$ で制限写像 $\circ{\restriction}(H\times H)\colon H\times H\to H,(\text{–})^{-1}{\restriction}H\colon H\to H$ が well-defined になる (すなわち像が H に含まれる) ようなものについて $(H,\circ{\restriction}(H\times H),(\text{–})^{-1}{\restriction}H,1_G)$ と表せる群のことである．H が G の部分群であることを $H\le G$ と表す．

群 G とその部分群 $H\le G$ に対し，G 上の同値関係 $\sim_H^{\mathrm{L}}\subseteq G\times G$ を $x,y\in G$ に対し $x\sim_H^{\mathrm{L}} y\ :\Longleftrightarrow\ x^{-1}y\in H$ と定義する．この同値関係による商集合 $G/{\sim_H^{\mathrm{L}}}$ を G/H で表し，元 $x\in G$ の同値類 $[x]_{\sim_H^{\mathrm{L}}}=\{\,y\in G\mid x\sim_H^{\mathrm{L}} y\,\}$ を G における H の**左剰余類** (left coset) と呼ぶ．各元 $x\in G$ について左剰余類が $[x]_{\sim_H^{\mathrm{L}}}=xH:=\{\,xh\mid h\in H\,\}$ と書けることは容易にわかる．同様に，G 上の同値関係 $\sim_H^{\mathrm{R}}\subseteq G\times G$ を $x,y\in G$ に対し $x\sim_H^{\mathrm{R}} y\ :\Longleftrightarrow\ xy^{-1}\in H$ と定義する．商集合 $G/{\sim_H^{\mathrm{R}}}$ を $H\backslash G$ で表し，元 $x\in G$ の同値類 $[x]_{\sim_H^{\mathrm{R}}}=\{\,y\in G\mid x\sim_H^{\mathrm{R}} y\,\}$ を G における H の**右剰余類** (right coset) と呼ぶ．各元 $x\in G$ について右剰余類は $[x]_{\sim_H^{\mathrm{R}}}=Hx:=\{\,hx\mid h\in H\,\}$ と書ける．商集合の濃度について $|G/H|=|H\backslash G|$ であることが容易にわかるので，この値を H の G における**指数** (index) といい，$(G:H)$ で表す．

群 G とその部分群 $H\le G$ について，商集合 G/H の完全代表系 $R\subseteq G$ をとると**左剰余類分解** (left coset

---

[1] 群の定義に逆元をとる写像 $(\text{–})^{-1}$ や単位元 1_G を含めている群論の入門書は少ないかもしれないが，位相群や群スキームを考える場合など，$(\text{–})^{-1}$ や 1_G を群のデータにあらかじめ含めておいた方が便利な場面は多い．

decomposition) $G = \bigsqcup_{r \in R} rH$ が得られる．特に，どんな元 $x \in G$ もただ一つの組 $(r, h) \in R \times H$ によって $x = rh$ と書ける．よって写像 $R \times H \to G; (r, h) \mapsto rh$ は全単射であり，$(G : H)|H| = |G/H||H| = |R||H| = |R \times H| = |G|$[2] を得る (Lagrange の定理)．同様に，$H \backslash G$ の完全代表系 $R \subseteq G$ をとると**右剰余類分解** (right coset decomposition) $G = \bigsqcup_{r \in R} Hr$ が得られる．

部分群 $N \leq G$ が**正規部分群** (normal subgroup) であるとは，$\forall n \in N \forall g \in G\ [gng^{-1} \in N]$ が成り立つことをいう．あるいは同じことだが，$\forall g \in G\ [gNg^{-1} \subseteq N]$ または $\forall g \in G\ [gNg^{-1} = N]$，または $\forall g \in G\ [gN = Ng]$ のいずれかが成り立つことと言ってもよい．N が G の正規部分群であることを $N \triangleleft G$ で表す．

群 G の正規部分群 $N \triangleleft G$ について，$G/N = N \backslash G$ が成り立ち，剰余類 $xN, yN \in G/N$ の積を $xN \cdot yN := (xy)N$，逆元を $(xN)^{-1} := x^{-1}N$ で定義すると well-defined となり，これらによって G/N は $1_G N = N$ を単位元とする群になる．G/N を G の N による**剰余群** (factor group) または**商群** (quotient group) と呼ぶ．剰余群に対して自然な全射 (商写像) $\pi \colon G \twoheadrightarrow G/N$ を考えるとこれは群準同型写像であり，その**核** (kernel) $\mathrm{Ker}(\pi) := \pi^{-1}(1_G)$ は $\mathrm{Ker}(\pi) = N$ となる．一般に，群 G の正規部分群とは G からのある群準同型写像の核として表せる部分群のことである．

群 G の部分集合 $S \subseteq G$ に対し，S の G における**中心化群** (centralizer) を $\mathrm{Z}_G(S) := \{\, g \in G \mid \forall s \in S\ [gs = sg] \,\}$ と定義し，S の G における**正規化群** (normalizer) を $\mathrm{N}_G(S) := \{\, g \in G \mid gS = Sg \,\}$ と定義する．S が 1 点集合 $S = \{s\}$ のときは $\mathrm{Z}_G(\{s\}), \mathrm{N}_G(\{s\})$ の代わりにそれぞれ単に $\mathrm{Z}_G(s), \mathrm{N}_G(s)$ と書く．$\mathrm{Z}_G(G)$ のことを単に $\mathrm{Z}(G)$ で表し，G の**中心** (center) という．明らかに $\mathrm{Z}(G) \triangleleft \mathrm{Z}_G(S) \triangleleft \mathrm{N}_G(S) \leq G$ が成り立つ．

3.1.2　群の作用

群 G の (空でない) 集合 X への **(左) 作用** ((left) action) とは写像 $\alpha \colon G \times X \to X$ であって 2 条件

- $\forall x \in X\ [\alpha(1_G, x) = x]$,
- $\forall g, g' \in G \forall x \in X\ [\alpha(g, \alpha(g', x)) = \alpha(gg', x)]$

をみたすものである．言い換えると，G の X への作用とは群準同型写像 $G \to \mathrm{Aut}(X); g \mapsto \alpha(g, -)$ のことである (ここで $\mathrm{Aut}(X)$ は X の**自己同型群** (automorphism group)，すなわち全単射 $\sigma \colon X \to X$ 全体が写像の合成に関してなす群を表す．ただし，X が代数構造や位相構造を備えている場合には，σ として同型写像や同相写像のような「構造を保つ写像」のみを考える[3])．像 $\alpha(g, x)$ を省略して単に $g \cdot x$ や gx とも書く．G が X に作用していることを $G \curvearrowright X$ と表す[4]．この作用のもとでの元 $x \in X$ の**軌道** (orbit) を $\mathrm{Orb}_G(x) := \{\, gx \mid g \in G \,\}$ と定義し，x の**固定群** (stabilizer，安定化群) を $\mathrm{Stab}_G(x) := \{\, g \in G \mid gx = x \,\}$ と定義する[5]．$\mathrm{Stab}_G(x)$ は G の部分群であり，全単射 $G/\mathrm{Stab}_G(x) \to \mathrm{Orb}_G(x); g\,\mathrm{Stab}_G(x) \mapsto gx$ がある．2 つの元 $x, y \in X$ に対し，$\mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(y)$ という関係は明らかに同値関係であり，この関係による X の商集合を $G \backslash X$ で表す[6]．

群 G の集合 X への作用 $G \curvearrowright X$ が**推移的** (transitive) であるとは，$\forall x, y \in X \exists g \in G\ [gx = y]$ をみたすこと，すなわちすべての $x \in X$ について $\mathrm{Orb}_G(x) = X$ であることをいう．作用 $G \curvearrowright X$ が**忠実** (faithful) あるいは**効果的** (effective) であるとは，$\forall g, g' \in G\ [g \neq g' \implies \exists x \in X\ [gx \neq g'x]]$ をみたすこと，言い換えると $\forall g \in G\ [g \neq 1_G \implies \exists x \in X\ [gx \neq x]]$ であること，または作用に対応する群準同型写像 $G \to \mathrm{Aut}(X)$ が単射であることをいう．作用 $G \curvearrowright X$ が**自由** (free) であるとは，$\forall g \in G\ [g \neq 1_G \implies \forall x \in X\ [gx \neq x]]$ であること，すなわち各 $g \in G - \{1_G\}$ を $\mathrm{Aut}(X)$ の元としてみたときに固定点 (不動点) を持たないことをいう．自由な作用は明らかに忠

[2] G が無限群の場合でも，等式中の積を**基数** (cardinal (number)) の積だとみなせば正しい主張になる．
[3] 圏の言葉を用いれば，(局所小) 圏 $\mathcal{C}$ の対象 X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ とは，X から X への $\mathcal{C}$ における同型射全体がなす群のことである．
[4] 「群 G が X に作用している」といったときは，通常「群 G の集合 X への作用をひとつとり固定する」程度の意味である．不思議な言い回しだが，作用に名前を付けないことで記号を節約できるという利点があると言えなくもない．
[5] $x \in X$ の軌道と固定群はそれぞれ Gx，G_x と書いてある文献が多いが，区別しづらいのでこのような記号にした．
[6] X/G ではなく $G \backslash X$ と書くのは左作用であることを強調するためである．

実である．

3.1.3　共役

群 G の 2 元 $a,b\in G$ が**共役である** (conjugate) とは，ある元 $g\in G$ によって $b=gag^{-1}$ と書けることをいう．共役であるという関係は G 上の同値関係であり，その同値類を**共役類** (conjugacy class) という．各元 $g\in G$ に対し写像 $(-)^g\colon G\to G$ を共役をとる操作 $a^g:=gag^{-1}$ で定義すると準同型写像 $G\to\mathrm{Aut}(G); g\mapsto(-)^g$ により作用 (共役作用) が定まる[7]．共役作用による元 $x\in G$ の軌道 $\mathrm{Orb}_G(x)$ は x の共役類に一致し，固定群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ は x の中心化群 $\mathrm{Z}_G(x)$ に一致する．共役をとる写像 $(-)^g$ の形で表せる自己同型写像を**内部自己同型写像** (inner automorphism) と呼び，その全体のなす正規部分群 $\mathrm{Inn}(G):=\{\,(-)^g\mid g\in G\,\}\lhd\mathrm{Aut}(G)$ を**内部自己同型群** (inner automorphism group) という．群 G の部分群 $H_1,H_2\le G$ が共役であるとは，ある元 $g\in G$ によって $H_2=gH_1g^{-1}$ と書けることをいう．

3.1.4　生成される部分群と正規部分群

群 G の部分集合 $S\subseteq G$ を含む最小の部分群 $\langle S\rangle:=\bigcap_{S\subseteq H\le G}H\le G$ を S で**生成される** (generated) 部分群といい，S を群 $\langle S\rangle$ の**生成系** (system of generators) または**生成集合** (generating set) という．G の部分群であることを強調して $\langle S\rangle$ を $\langle S\rangle_G$ と書くこともある．容易にわかるように $\langle S\rangle=\{\,s_1^{e_1}s_2^{e_2}\cdots s_n^{e_n}\in G\mid n\ge 0, s_i\in S, e_i\in\{\pm1\}\,\}$ である．群 G がある元 $g\in G$ によって $G=\langle g\rangle$ と書けるとき，G を**巡回群** (cyclic group) という．群 G の元 $g\in G$ によって生成される巡回部分群 $\langle g\rangle\le G$ の濃度 $|\langle g\rangle|$ を g の**位数** (order) といい，記号 $\mathrm{ord}(g)$ で表す．定義より $\mathrm{ord}(g)\in\mathbb{Z}_{>0}\cup\{\infty\}$ である．

S を含む最小の正規部分群 $\langle\langle S\rangle\rangle:=\bigcap_{S\subseteq N\lhd G}N\lhd G$ を S の**正規閉包** (normal closure) という．これも G の部分群であることを強調して $\langle\langle S\rangle\rangle$ を $\langle\langle S\rangle\rangle_G$ と書くこともある．容易にわかるように $\langle\langle S\rangle\rangle=\langle\bigcup_{g\in G}gSg^{-1}\rangle$ である．$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$ が有限集合のとき，$\langle\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\rangle,\langle\langle\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\rangle\rangle$ をそれぞれ単に $\langle s_1,s_2,\ldots,s_n\rangle,\langle\langle s_1,s_2,\ldots,s_n\rangle\rangle$ で表す．ある有限部分集合 $S\subseteq G$ によって生成される群 $G=\langle S\rangle$ のことを**有限生成群** (finitely generated group) という．

3.2　有限指数部分群と実質的性質 (virtually ○○)

ここでは部分群の指数に関する基本的な事実，特に有限指数部分群に関する結果について説明する．

定義 3.1 (有限指数部分群).　群 G の部分群 $H\le G$ であって指数 $(G:H)$ が有限であるようなものを G の**有限指数部分群** (finite index subgroup, subgroup of finite index) という．

定義 3.2 (実質的性質).　P を同型で不変な群の性質とする (すなわち，群 G が P をみたし，$G\cong H$ ならば H も P をみたす)．群 G が**実質的に P である** (virtually P) とは，ある有限指数部分群 $H\le G$ が P みたすことをいう．

性質 P の例としては「自明群である」「有限群である」「有限生成アーベル群である」などが挙げられる (実際には，「実質的自明群」と「実質的有限群」はどちらも有限群のことである)．特に，Muller–Schupp の定理 0.1 の主張に現れる「実質的自由群」とは，有限指数の自由部分群を持つような群のことである (自由群については 4.3 節で定義を与える)．

補題 3.3.　部分群の列 $K\le H\le G$ について $(G:K)=(G:H)(H:K)$ が成り立つ[8]．

[7] $a^g=g^{-1}ag$ と定義する文献もある．この場合，共役作用は右作用になる．

証明． 商集合 G/H の完全代表系 $R \subseteq G$ をとると，任意の元 $g \in G$ はただ一つの組 $(r_g, h_g) \in R \times H$ によって $g = r_g h_g$ と書ける．このとき写像 $f\colon G/K \to G/H \times H/K; gK \mapsto (r_g H, h_g K)$ が well-defined な全単射になることを示せばよい．

(well-defined 性) 任意に $gK = g'K \in G/K$ をとると $h_g^{-1} r_g^{-1} r_{g'} h_{g'} = g^{-1}g' \in K \subseteq H$ より $r_g H = r_g h_g H = r_{g'} h_{g'} H = r_{g'} H$ だから，R が完全代表系であることより $r_g = r_{g'}$ が成り立つ．よって $r_g^{-1} r_{g'} = 1_G \in H$ かつ $h_g^{-1} h_{g'} = h_g^{-1} r_g^{-1} r_{g'} h_{g'} \in K$ となるので $f(gK) = (r_g H, h_g K) = (r_{g'} H, h_{g'} K) = f(g'K)$ となる．

(全射性) 任意に $(gH, hK) \in G/H \times H/K$ をとると，$f(r_g hK) = (r_g H, hK) = (gH, hK)$ を得る．

(単射性) $f(gK) = f(g'K)$ とすると $(r_g H, h_g K) = (r_{g'} H, h_{g'} K)$ である．R が完全代表系であることより $r_g = r_{g'}$ であり，さらに $h_g^{-1} h_{g'} \in K$ であるので $g^{-1}g' = h_g^{-1} r_g^{-1} r_{g'} h_{g'} = h_g^{-1} h_{g'} \in K$，すなわち $gK = g'K$ を得る． □

補題 3.4. 群 G の部分群 $H_1, H_2 \leq G$ に対し，$(G : H_1 \cap H_2) \leq (G : H_1)(G : H_2)$ が成り立つ[9]．

証明． $H_1 \cap H_2 \leq H_1$ であることは容易にわかる．写像 $f\colon H_1/(H_1 \cap H_2) \to G/H_2; h(H_1 \cap H_2) \mapsto hH_2$ が well-defined な単射であることに注意すると

$$\begin{aligned}(G : H_1 \cap H_2) &= (G : H_1)(H_1 : H_1 \cap H_2) && (\text{補題 3.3 より})\\ &\leq (G : H_1)(G : H_2) && (f \text{ の単射性より})\end{aligned}$$

となる． □

系 3.5. 群 G の有限個の有限指数部分群 $H_1, H_2, \ldots, H_n \leq G$ の共通部分 $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n \leq G$ もまた有限指数部分群である．

証明． 補題 3.4 より，n に関する帰納法で

$$(G : H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) \leq (G : H_1)(G : H_2) \cdots (G : H_n) < \infty$$

がわかる． □

補題 3.6. 群 G の部分群 $H \leq G$ に対し，G の部分群であって H と共役なものは $(G : \mathrm{N}_G(H))$ 個であり，さらに $(G : \mathrm{N}_G(H)) \leq (G : H)$ が成り立つ．

証明． 任意の $g_1, g_2 \in G$ について，

$$\begin{aligned}g_1 H g_1^{-1} = g_2 H g_2^{-1} &\iff H(g_1^{-1} g_2) = (g_1^{-1} g_2)H\\ &\iff g_1^{-1} g_2 \in \mathrm{N}_G(H)\end{aligned}$$

となるから，G の部分群であって H と共役なものはちょうど $(G : \mathrm{N}_G(H))$ 個である[10]．さらに $g_1^{-1} g_2 \in H$ なら $(g_1^{-1} g_2)H = H = H(g_1^{-1} g_2)$ であることより，写像 $G/H \to G/\mathrm{N}_G(H); gH \mapsto g\,\mathrm{N}_G(H)$ は well-defined な全射となるので $(G : \mathrm{N}_G(H)) \leq (G : H)$ を得る． □

[8] この事実は $H, K \lhd G$ のときは第三同型定理 $(G/K)/(H/K) \cong G/H$ に相当するものである．
[9] この事実は $H_2 \lhd G$ のときは第二同型定理 $H_1 H_2/H_2 \cong H_1/(H_1 \cap H_2)$ に相当するものである．

命題 3.7. 群 G の有限指数部分群 $H \leq G$ に対し，部分群 $N \leq H$ であって以下をみたすものがとれる[11].

- N は G の有限指数部分群である．
- $N \lhd G$ である．

証明. $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ とおく．$N \lhd G$ であることは容易にわかる．補題 3.6 より gHg^{-1} の形の部分群は有限個しかなく，また gHg^{-1} は内部自己同型写像 $(-)^g$ による H の像だから $\left(G : gHg^{-1}\right) = (G : H) < \infty$ である．よって系 3.5 より N は G の有限指数部分群である． □

命題 3.8. 有限生成群 G の有限指数部分群 $H \leq G$ もまた有限生成である．

証明. G の有限な生成系 $S \subseteq G$ をとる．必要なら $S \cup S^{-1}$ を改めて S とおくことで，G の任意の元が S の有限個の元の積で表せるとしてよい．$H \backslash G$ の完全代表系 $R \subseteq G$ をとる．$1_G \in R$ であるとして一般性を失わない．このときどの $r \in R, s \in S$ に対しても，ただひとつの組 $(h(r,s), \rho(r,s)) \in H \times R$ によって $rs = h(r,s)\rho(r,s)$ と書ける．$T := \{\, h(r,s) \mid r \in R, s \in S \,\}$ とおく．H の各元が T の有限個の元の積で表せることを示せば十分である．

主張 3.9. どの元 $g \in G$ もある有限個の元 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ $(n \geq 0)$ と $r \in R$ によって $g = t_1 t_2 \cdots t_n r$ と表せる．

証明. S に関する仮定より，$g \in G$ はある有限個の元 $s_1, s_2, \ldots, s_m \in S$ $(m \geq 0)$ によって $g = s_1 s_2 \cdots s_m$ と表せる．m に関する帰納法で証明する．$m = 0$ のときは $g = 1_G \in R$ よりよい．m まで成り立つとして，$g = s_1 s_2 \cdots s_m s_{m+1}$ とする．このとき帰納法の仮定からある有限個の元 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ と $r \in R$ が存在して $g = t_1 t_2 \cdots t_n r s_{m+1} = t_1 t_2 \cdots t_n h(r, s_{m+1}) \rho(r, s_{m+1})$ と書ける． □

よって特にどの元 $h \in H$ も $h = t_1 t_2 \cdots t_n r$ $(t_i \in T, r \in R)$ の形に書けるはずだが，R のとり方より $r = 1_G$ でなければならない． □

[10] この事実は G の部分群全体の集合への共役作用を考えても証明することができる．H と共役な G の部分群全体が $\mathrm{Orb}_G(H)$ であることと $\mathrm{N}_G(H) = \mathrm{Stab}_G(H)$ であることに注意すれば $|\mathrm{Orb}_G(H)| = |G/\mathrm{Stab}_G(H)| = (G : \mathrm{N}_G(H))$ が得られる．

[11] この正規部分群 N は部分群 H の **normal core** と呼ばれる．

第 4 章

群の種々の構成法と普遍性

本章では与えられた群の族から新しい群を構成する方法をいくつか見る．まず直積・直和やアーベル化などの簡単な構成法について復習した後，Muller–Schupp の定理 0.1 において最も重要な自由群の定義と基本性質を述べ，続いて群の表示，自由積，融合積と半直積，HNN 拡大について定義と例を見る．中でも融合積や HNN 拡大は**代数トポロジー** (algebraic topology) において**基本群** (fundamental group) を考える際に自然に現れる群の構成法である．

本章を通して重要となるキーワードの一つが**普遍性** (universality) である．普遍性は**圏論** (category theory) において基本的な概念であるが，本章を読み進めるために圏論について知っている必要はない．

さらに，本章では融合積や HNN 拡大といった群の構成法を書き換え系の言葉を用いて整理・厳密化することを目指す．これは筆者が本稿を著した主要な動機の一つでもある．

まず，簡単だが有用な補題を用意しておく．以下は準同型定理の一般化の一つである．

補題 4.1. G, H を群，$N \lhd G$ を正規部分群とし，$\pi\colon G \twoheadrightarrow G/N$ を商写像，$f\colon G \to H$ を群準同型写像とする．このとき $N \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ ならば，図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $\bar{f}\colon G/N \to H$ がただ一つ存在する．

証明. 可換性であるためには，各剰余類 $gN \in G/N$ $(g \in G)$ に対し $\bar{f}(gN) = \bar{f}(\pi(g)) = f(g)$ となるしかない．また $\bar{f}$ をこのように定義すると $gN = g'N$ $(g, g' \in G)$ のとき，$g^{-1}g' \in N \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ だから $f(g)^{-1}f(g') = f(g^{-1}g') = 1_G$ より $\bar{f}(gN) = f(g) = f(g') = \bar{f}(g'N)$ となり，$\bar{f}$ は well-defined な群準同型写像である． □

4.1 群の直積とアーベル群の直和

集合 Λ で添字付けられた群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，その直積を $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ と書く．添字集合 Λ が有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ のときは直積を $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ と書く．すべての G_λ が同一の群 G であるようなとき，その直積を G^Λ で表す．群の直積は次の普遍性をみたす．

命題 4.2 (直積の普遍性). 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とその直積 $G := \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ について，$\lambda \in \Lambda$ 成分への射影を

$p_\lambda\colon G \twoheadrightarrow G_\lambda; (g_\mu)_{\mu\in\Lambda} \mapsto g_\lambda$ とする．群 H から各 G_λ へ群準同型写像 $f_\lambda\colon H \to G_\lambda$ があるとき，すべての図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "p_\lambda"] & G_\lambda \\ H \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $f\colon H \to G$ がただ一つ存在する．

証明．可換であるためには，各 $\lambda \in \Lambda$ と各元 $h \in H$ について $p_\lambda(f(h)) = f_\lambda(h)$ でなければならないので，$f(h) = (f_\lambda(h))_{\lambda\in\Lambda}$ でなければならず，また f をこのように定義すれば実際に群準同型写像になる． □

アーベル群の族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和** (direct sum) は，直積群 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ の部分群として

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{\, (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid a_\lambda \neq 0_{A_\lambda} \text{ となるような } \lambda \in \Lambda \text{ は有限個} \,\}$$

と定義される群である．直和の元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ のことを $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ とも表す．直積の場合と同様に，すべての A_λ が同一の群 A である場合にはその直和を $A^{\oplus\Lambda}$ と表す．特に，$\mathbb{Z}^{\oplus\Lambda}$ の形のアーベル群を**自由アーベル群** (free abelian group) と呼ぶ．

定義より Λ が有限集合のときは，直積と直和は一致する．一方で Λ が無限集合のときは，直積と直和は一致するとは限らず，例えば $|\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}| = \aleph_0$ だが $|\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$ である[1]．直積の場合と同様に，群の直和は次の普遍性をみたす．

命題 4.3 (アーベル群の直和の普遍性)． アーベル群の族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とその直和 $A := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ について，$\lambda \in \Lambda$ 成分からの入射を $i_\lambda\colon A_\lambda \hookrightarrow A; a_\lambda \mapsto a_\lambda$ とする．つまり，$a_\lambda \in A_\lambda$ について，$i_\lambda(a_\lambda) = (a_\mu)_{\mu\in\Lambda}$ とすると

$$a_\mu = \begin{cases} a_\lambda & (\mu = \lambda \text{ のとき}), \\ 0_{A_\mu} & (\mu \neq \lambda \text{ のとき}) \end{cases}$$

ということである．各 A_λ からアーベル群 B へ群準同型写像 $f_\lambda\colon A_\lambda \to B$ があるとき，すべての図式

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[r, hook, "i_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & A \arrow[d, dashed, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $f\colon A \to B$ がただ一つ存在する．

証明．可換であるためには，各 $\lambda \in \Lambda$ と各元 $a_\lambda \in A_\lambda$ に対し $f(a_\lambda) = f(i_\lambda(a_\lambda)) = f_\lambda(a_\lambda)$ でなければならない．よって，各 $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \in A$ に対し $f(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(a_\lambda)$ でなければならず，また f をこのように定義すれば実際に群準同型写像になる． □

系 4.4 (自由アーベル群の普遍性)． Λ を集合とし，自由アーベル群 $\mathbb{Z}^{\oplus\Lambda}$ の標準基底を $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda}$ とする．すなわち，各 $e_\lambda = (e_{\lambda,\mu})_{\mu\in\Lambda} \in \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda}$ は

$$e_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \lambda \text{ のとき}), \\ 0 & (\mu \neq \lambda \text{ のとき}) \end{cases}$$

[1] ここで $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ は可算集合の濃度であり，$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ は連続体濃度である．

をみたす．写像 $i\colon \Lambda \hookrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda}$ を $i(\lambda) := e_\lambda$ とおく．任意のアーベル群 B と写像 $f\colon \Lambda \to B$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & B \\ \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $\tilde{f}\colon \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda} \to B$ がただ一つ存在する．

証明．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，群準同型写像 $i_\lambda\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda}$ を $i_\lambda(n) := ne_\lambda$ とおき，群準同型写像 $f_\lambda\colon \mathbb{Z} \to B$ を $f_\lambda(n) := nf(\lambda)$ とおく．このとき命題 4.3 よりすべての図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "i_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda} \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & \Lambda \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

の左側の三角形を可換にする群準同型写像 $\tilde{f}\colon \mathbb{Z}^{\oplus\Lambda} \to B$ がただ一つ存在する．作り方から $\tilde{f}$ は各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\tilde{f}(e_\lambda) = f_\lambda(1)$ をみたす．このとき各 $\lambda \in \Lambda$ について $\tilde{f}(i(\lambda)) = \tilde{f}(e_\lambda) = \tilde{f}(i_\lambda(1)) = f_\lambda(1) = f(\lambda)$ となるので $\tilde{f} \circ i = f$ が成り立つ．逆に，$\tilde{f} \circ i = f$ ならば各 $\lambda \in \Lambda$ について $\tilde{f}(e_\lambda) = \tilde{f}(i(\lambda)) = f(\lambda) = f_\lambda(1)$ でなければならないので $\tilde{f}$ は一意である． □

アーベル群とは限らない一般の群の直和に相当する概念は自由積であり，これは 4.5 節で改めて取り上げる．

4.2　交換子とアーベル化

群 G の 2 つの元 $x, y \in G$ の**交換子** (commutator) を

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$$

で定義する[2]．交換子の逆元は $[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$ で与えられる．群 G の交換子全体で生成される部分群

$$[G, G] := \langle \{\, [x, y] \mid x, y \in G \,\} \rangle$$

を G の**交換子 (部分) 群** (commutator subgroup) と呼ぶ．

補題 4.5.　交換子群について，$[G, G] \lhd G$ が成り立つ．

証明．まず，各 $x, y, z \in G$ について

$$\begin{aligned} z[x, y]z^{-1} &= zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = zx(z^{-1}z)y(z^{-1}z)x^{-1}(z^{-1}z)y^{-1}z^{-1} \\ &= (zxz^{-1})(zyz^{-1})(zx^{-1}z^{-1})(zy^{-1}z^{-1}) = [zxz^{-1}, zyz^{-1}] \in [G, G] \end{aligned}$$

が成り立つ．各 $x, y \in G$ について $[x, y]^{-1} = [y, x]$ であることより，$[G, G]$ のどの元も $[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n]$ $(n \geq 0, x_i, y_i \in G)$ という形に書くことができ，各元 $z \in G$ について

$$\begin{aligned} z[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n]z^{-1} &= z[x_1, y_1]z^{-1}z[x_2, y_2]z^{-1} \cdots z[x_n, y_n]z^{-1} \\ &= [zx_1z^{-1}, zy_1z^{-1}][zx_2z^{-1}, zy_2z^{-1}] \cdots [zx_nz^{-1}, zy_nz^{-1}] \in [G, G] \end{aligned}$$

を得る． □

[2] $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ と定義する文献もある．

補題 4.6. G を群，$S \subseteq G$ をその生成系とするとき，$\langle\!\langle \{ [s,t] \mid s,t \in S \} \rangle\!\rangle = [G,G]$ が成り立つ．

証明． $(\subseteq)$ 補題 4.5 より．
$(\supseteq)$ $N := \langle\!\langle \{ [s,t] \mid s,t \in S \} \rangle\!\rangle$ とおく．

主張 4.7. 各元 $x,y,z \in G$ について，

(1) $[x,y] \in N$ ならば $[x^{-1},y] \in N$.
(2) $[x,y] \in N$ ならば $[x,y^{-1}] \in N$.
(3) $[x,z],[y,z] \in N$ ならば $[xy,z] \in N$.
(4) $[x,y],[x,z] \in N$ ならば $[x,yz] \in N$.

証明． $N \lhd G$ という条件のみを用いる．

(1) $[x^{-1},y] = x^{-1}yxy^{-1} = x^{-1}yxy^{-1}(x^{-1}x) = x^{-1}[y,x]x = x^{-1}[x,y]^{-1}x \in N$.
(2) $[x,y^{-1}] = xy^{-1}x^{-1}y = (y^{-1}y)xy^{-1}x^{-1}y = y^{-1}[y,x]y = y^{-1}[x,y]^{-1}y \in N$.
(3) $[xy,z] = xyzy^{-1}x^{-1}z^{-1} = xyzy^{-1}(z^{-1}x^{-1}xz)x^{-1}z^{-1} = x[y,z]x^{-1}[x,z] \in N$.
(4) $[x,yz] = xyzx^{-1}z^{-1}y^{-1} = xy(x^{-1}y^{-1}yx)zx^{-1}z^{-1}y^{-1} = [x,y]y[x,z]y^{-1} \in N$. □

交換子群の定義より，どんな元 $x,y \in G$ についても $[x,y] \in N$ であることを示せば十分である．S が G の生成系であることより，各元 $x,y \in G$ は $x = s_1^{e_1}s_2^{e_2}\cdots s_m^{e_m}, y = t_1^{f_1}t_2^{f_2}\cdots t_n^{f_n}$ $(s_i,t_j \in S, e_i,f_j \in \{\pm 1\}, m,n \geq 0)$ の形に書ける．(1) より各 i,j について $[s_i^{e_i},t_j] \in N$ がわかるので，(3) を繰り返し用いると $[x,t_j] \in N$ がわかる．よって (2) より $[x,t_j^{f_j}] \in N$ となるので，(4) を繰り返し用いると $[x,y] \in N$ を得る． □

群 G の交換子群 $[G,G]$ による剰余群を G の**アーベル化** (abelianization) と呼び，記号 $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ で表す．アーベル化は次の普遍性をみたす．

命題 4.8 (アーベル化の普遍性). 群 G からそのアーベル化 G^{ab} への商写像を $\pi\colon G \twoheadrightarrow G^{\mathrm{ab}}$ とし，G からアーベル群 A への群準同型写像 $f\colon G \to A$ があるとする．このとき，図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $\bar{f}\colon G^{\mathrm{ab}} \to A$ がただ一つ存在する．

証明． A がアーベル群であることより $[G,G] \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ であるので，補題 4.1 より． □

4.3　自由群

自由群とは，群の定義から要請される関係式以外に非自明な関係式をまったくみたさないような特別な群であり，Muller–Schupp の定理 0.1 はまさにこの自由群についての主張である．位相空間の基本群の観点からは，自由群はグラフ (= 1 次元複体) の基本群に相当するものである．また，次章で述べる群の表示の観点からは，自由群は “すべての群の生みの親” とでも言うべき群である (cf. 系 4.16，補題 4.26).

X を集合とし，$\bar{X} := \{ \bar{x} \mid x \in X \}$ をそのコピーとする．(有限とは限らない) アルファベット Σ_X を直和 $\Sigma_X := X \sqcup \bar{X}$ で定める．Σ_X 上の写像 $\bar{\cdot}\colon \Sigma_X \to \Sigma_X$ を，$x \in X$ に対しては $\bar{x} \in \bar{X}$ を，$\bar{x} \in \bar{X}$ に対しては $\bar{\bar{x}} := x \in X$

を対応させるものとする．このとき，写像 $\bar{\cdot}$ はすべての $x \in \Sigma_X$ に対し $\bar{x} \neq x$ かつ $\bar{\bar{x}} = x$ をみたす[3]．群論では，Σ_X^* の元のことを特に X 上の**語** (word) と呼ぶ．

定義 4.9 (自由群).　Σ_X 上の文字列書き換え系 $\mathrm{C}[X] \subseteq \Sigma_X^* \times \Sigma_X^*$ を $\mathrm{C}[X] := \{\, (x\bar{x}, \varepsilon) \mid x \in \Sigma_X \,\}$ と定める[4]．X を自由基底とする**自由群** (free group) $\mathrm{F}(X)$ は，商集合

$$\mathrm{F}(X) := \Sigma_X^* / \underset{\mathrm{C}[X]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}}$$

として定義される．X が $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ という有限集合のときは，$\mathrm{F}(X)$ を $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とも書く．群 F がある集合 X について $F \cong \mathrm{F}(X)$ となるとき，F のことも自由群と呼ぶ．

補題 4.10.　自由群 $\mathrm{F}(X)$ は実際に群になっている．

証明. $\mathrm{F}(X)$ に well-defined な商モノイドの構造が入ることは命題 1.17 よりよい．$\mathrm{F}(X)$ の単位元 $1_{\mathrm{F}(X)}$ は空語 $\varepsilon \in \Sigma_X^*$ で代表される同値類 $[\varepsilon] \in \mathrm{F}(X)$ である．2 つの語 $u, v \in \Sigma_X^*$ に対し，$u \underset{\mathrm{C}[X]}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v$ は「u 内の $x\bar{x}$ という形の部分を削除することを繰り返して v が得られる」ことを意味し，$u \underset{\mathrm{C}[X]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}} v$ は「u に $x\bar{x}$ という形の文字列を削除する，または挿入することを繰り返して v が得られる」ことを意味する．よって，語 $w = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma_X^*$ $(x_i \in \Sigma_X)$ で代表される同値類 $[w] \in \mathrm{F}(X)$ についてその逆元は $[w]^{-1} = [\bar{x}_n \cdots \bar{x}_2 \bar{x}_1] \in \mathrm{F}(X)$ で与えられる．　□

自由群において，$x\bar{x}$ の形の部分を含まない語を (自由) 被約語と呼ぶ．書き換え系の言葉で言うと以下のようになる．

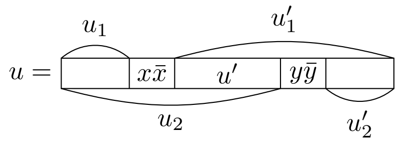
定義 4.11 ((自由) 被約語).　X 上の語 $w \in \Sigma_X^*$ が **(自由) 被約語** ((freely) reduced word) であるとは，w が Σ_X^* 上の抽象書き換え系 $\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}$ に関して正規形 (定義 1.9) であることをいう．すなわち，X 上の被約語とは $\mathrm{IRR}(\mathrm{C}[X])$ の元のことである．

被約語に関して，文字列書き換え系の言葉を用いて書かれている群論の入門書はほとんどない．しかし，文字列書き換え系は以下で述べるような様々な主張を厳密に証明するのに有用である．

命題 4.12.　Σ_X 上の文字列書き換え系 $\mathrm{C}[X] \subseteq \Sigma_X^* \times \Sigma_X^*$ は強合流的かつ短縮的である．

証明. 短縮的であることは明らか．強合流的であることを示す．語 $u, v_1, v_2 \in \Sigma_X^*$ について，$v_1 \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftarrow} u \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow} v_2$ であるとする．$\mathrm{C}[X]$ の定義から，ある分解 $u = u_1 x\bar{x} u_1' = u_2 y\bar{y} u_2'$ $(u_1, u_1', u_2, u_2' \in \Sigma_X^*, x, y \in \Sigma_X)$ について $v_1 = u_1 u_1'$ かつ $v_2 = u_2 u_2'$ となっている．対称性から $u_1 \preccurlyeq u_2$ として一般性を失わない．書き換えによって削除される部分 $x\bar{x}, y\bar{y}$ の重なり方によって場合分けする．

($|u_2| \geq |u_1| + 2$ のとき)　これは $x\bar{x}$ と $y\bar{y}$ に重なりがないということだから $u_2 = u_1 x\bar{x} u'$ $(u' \in \Sigma_X^*)$ と分解でき，このとき $u_1' = u' y\bar{y} u_2'$ でもあるから $v_1 = u_1 u_1' = u_1 u' y\bar{y} u_2' \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow} u_1 u' u_2' \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftarrow} u_1 x\bar{x} u' u_2' = u_2 u_2' = v_2$ となる．



[3] 数学では，このような「2 回行うと元に戻る操作」のことを**対合** (involution) と呼ぶことがある．
[4] $\mathrm{C}[X]$ という記号は本稿だけのものゆえ，他所では通じないことに注意されたい (C は Cancel の頭文字のつもり)．

($|u_2| = |u_1| + 1$ のとき) このとき $\bar{x} = y$ でなければならないから，特に $u = u_1 x\bar{x}xu'_2$ であるので $v_1 = u_1u'_1 = u_1xu'_2 = u_2u'_2 = v_2$ となる．

($u_1 = u_2$ のとき) このとき $x\bar{x} = y\bar{y}$ だから $v_1 = v_2$ となる． □

系 4.13. X 上の語 $w \in \Sigma_X^*$ に対し，w と同値な被約語 $w{\downarrow} \in \mathrm{IRR}(\mathrm{C}[X])$ がただ一つ存在する．特に，$w{\downarrow}$ は w 中の $x\bar{x}$ の形をした部分を削除する操作を可能な限り繰り返すことで得られ，しかも操作を施す順番によらない．

証明. 命題 4.12 より $\mathrm{C}[X]$ は収束的だから前半は定理 1.10 よりわかる．後半は定理 1.7 より $\mathrm{C}[X]$ が Church–Rosser 性を持つことの言い換えである． □

系 4.13 の重要な帰結は，「文字列として異なる被約語は自由群 $\mathrm{F}(X)$ においても異なる元を表す」ということである．すなわち，「見た目が違えば違う元である」という判定法が正しく機能する．

これ以降，語 $w \in \Sigma_X^*$ で代表される同値類 $[w] \in \mathrm{F}(X)$ のことを省略して単に $w \in \mathrm{F}(X)$ と書くことがある．特に，$x \in X$ について $\bar{x} = x^{-1}$ と書ける．また，単位元 $1_{\mathrm{F}(X)} = [\varepsilon] \in \mathrm{F}(X)$ のことも単に $\varepsilon \in \mathrm{F}(X)$ や $1 \in \mathrm{F}(X)$ などと表すことがある．

自由群の具体例をいくつか見てみよう．

例 4.14.
(1) $X = \emptyset$ のとき，$\Sigma_X^* = \{\varepsilon\}$ だから $\mathrm{F}(\emptyset) = \{1\}$ (自明群) である．
(2) $X = \{x\}$ のとき，$\mathrm{IRR}(\mathrm{C}[\{x\}]) = \mathrm{L}(x^* \cup \bar{x}^*)$ (正則表現については定義 2.12 を参照) より $\mathrm{F}(x) = \{\, x^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ であるから $\mathrm{F}(x) \cong \mathbb{Z}$ である．一般に，$X \neq \emptyset$ ならば自由群 $\mathrm{F}(X)$ は無限群である．
(3) $X = \{x, y\}$ のとき，$\mathrm{F}(x, y) = \{1, x, y, x^{-1}, y^{-1}, x^2, xy, xy^{-1}, yx, y^2, yx^{-1}, x^{-1}y, x^{-2}, x^{-1}y^{-1}, x^3, \dots\}$ といった元を含む．特に，$xy \neq yx$ であることより，$\mathrm{F}(x, y)$ は非可換な群である．一般に，自由群 $\mathrm{F}(X)$ がアーベル群であることは $|X| \leq 1$ であることと同値である．

自由群は次の普遍性をみたす．

命題 4.15 (自由群の普遍性). X を集合とし，$i\colon X \hookrightarrow \mathrm{F}(X)$ を包含写像とする．任意の群 G と写像 $f\colon X \to G$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & G \\ \mathrm{F}(X) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $\tilde{f}\colon \mathrm{F}(X) \to G$ がただ一つ存在する．

証明. 可換であるためには，各元 $x \in X$ に対し $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}(i(x)) = f(x)$ でなければならず，また準同型であるためには $x \in X$ について $\tilde{f}([\bar{x}]) = \tilde{f}([x]^{-1}) = \tilde{f}([x])^{-1} = f(x)^{-1}$ でなければならず，さらに各語 $w = x_1x_2 \cdots x_n \in \Sigma_X^*$ ($x_i \in \Sigma_X$) に対し $\tilde{f}(w) = \tilde{f}(x_1)\tilde{f}(x_2) \cdots \tilde{f}(x_n)$ でなければならない．また $\tilde{f}$ をこのように定義すれば，書き換え系 $\mathrm{C}[X]$ の定義より実際に well-defined な群準同型写像になる． □

系 4.16. どんな群 G に対しても，ある自由群 $\mathrm{F}(X)$ からの全射群準同型写像 $\varphi\colon \mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow G$ がある．さらに，G が有限群なら X は有限集合でとれる．

証明. $X := G$ と恒等写像 $\mathrm{id}\colon X \to G$ に命題 4.15 を適用すれば全射群準同型写像 $\widetilde{\mathrm{id}}\colon \mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow G$ を得る． □

自由群 $\mathrm{F}(X)$ について，その基底の濃度 $|X|$ のことを $\mathrm{F}(X)$ の階数と呼ぶのだが，これが同型で不変な量であることは自明なことではない．以下ではこのことの証明を通して，普遍性を利用した典型的な議論の例を見ていくことに

する．

命題 4.17.　自由群 $\mathrm{F}(X)$ のアーベル化は $\mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{\oplus X}$ で与えられ，さらに $\mathrm{F}(X) \cong \mathrm{F}(Y)$ ならば $\mathbb{Z}^{\oplus X} \cong \mathbb{Z}^{\oplus Y}$ が成り立つ．

証明．包含写像 $i\colon X \hookrightarrow \mathrm{F}(X), j\colon X \hookrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus X}$ と商写像 $\pi\colon \mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}$ をとる．自由群の普遍性 (命題 4.15) より，群準同型写像 $\tilde{j}\colon \mathrm{F}(X) \to \mathbb{Z}^{\oplus X}$ で $j = \tilde{j} \circ i$ なるものがとれる．さらに，アーベル化の普遍性 (命題 4.8) より群準同型写像 $\bar{\tilde{j}}\colon \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{Z}^{\oplus X}$ で $\tilde{j} = \bar{\tilde{j}} \circ \pi$ となるものがとれる．また，自由アーベル群の普遍性 (系 4.4) から群準同型写像 $\widetilde{\pi \circ i}\colon \mathbb{Z}^{\oplus X} \to \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}$ で $\pi \circ i = \widetilde{\pi \circ i} \circ j$ となるものがとれる．まとめると，図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathbb{Z}^{\oplus X} \arrow[d, shift left, "\widetilde{\pi\circ i}"] \\
\mathrm{F}(X) \arrow[r, two heads, "\pi"'] \arrow[ur, "\tilde{j}"] & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \arrow[u, shift left, "\bar{\tilde{j}}"]
\end{tikzcd}$$

がある．このとき 2 つの可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}^{\oplus X} \arrow[d, "\widetilde{\pi\circ i}"] \\
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[urr, bend left, "j"] \arrow[drr, bend right, "j"'] & \mathrm{F}(X) \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{j}"'] & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\bar{\tilde{j}}"] \\
 & & \mathbb{Z}^{\oplus X}
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}^{\oplus X} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{\oplus X}}"] \\
X \arrow[ur, bend left, "j"] \arrow[dr, bend right, "j"'] & \\
 & \mathbb{Z}^{\oplus X}
\end{tikzcd}$$

と自由アーベル群の普遍性の一意性の部分より，$\bar{\tilde{j}} \circ \widetilde{\pi \circ i} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{\oplus X}}$ でなければならない．図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\widetilde{\pi\circ i}\circ\tilde{j}\circ i = \widetilde{\pi\circ i}\circ j = \pi\circ i"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \\
\mathrm{F}(X) \arrow[ur, shift left, "\pi"] \arrow[ur, shift right, bend right, "\widetilde{\pi\circ i}\circ\tilde{j}"'] &
\end{tikzcd}$$

について，自由群の普遍性の一意性の部分から $\widetilde{\pi \circ i} \circ \tilde{j} = \pi$ でなければならない．よって可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\bar{\tilde{j}}"] \\
\mathrm{F}(X) \arrow[ur, two heads, "\pi"] \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & \mathbb{Z}^{\oplus X} \arrow[d, "\widetilde{\pi\circ i}"] \\
 & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}}"] \\
\mathrm{F}(X) \arrow[ur, two heads, "\pi"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & \\
 & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}
\end{tikzcd}$$

とアーベル化の普遍性の一意性の部分より $\widetilde{\pi \circ i} \circ \bar{\tilde{j}} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}}$ でなければならない．以上より同型 $\mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{\oplus X}$ を得る．

次に，群の同型写像 $f\colon \mathrm{F}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}(Y)$ があるとする．商写像 $\pi_X\colon \mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}, \pi_Y\colon \mathrm{F}(Y) \twoheadrightarrow \mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}}$ をとる．アーベル化の普遍性から群準同型写像 $\overline{\pi_Y \circ f}\colon \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}}$ で $\pi_Y \circ f = \overline{\pi_Y \circ f} \circ \pi_X$ となるものがとれる．同様に，群準同型写像 $\overline{\pi_X \circ f^{-1}}\colon \mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}$ で $\pi_X \circ f^{-1} = \overline{\pi_X \circ f^{-1}} \circ \pi_Y$ となるものがとれる．ま

とめると，図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(X) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_X"'] & \mathrm{F}(Y) \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, two heads, "\pi_Y"] \\ \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \arrow[r, shift left, "\overline{\pi_Y \circ f}"] & \mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}} \arrow[l, shift left, "\overline{\pi_X \circ f^{-1}}"] \end{tikzcd}$$

がある．このとき 2 つの可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_X"'] & \mathrm{F}(Y) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, two heads, "\pi_Y"] & \mathrm{F}(X) \arrow[d, two heads, "\pi_X"] \\ \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\overline{\pi_Y \circ f}"] & \mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\overline{\pi_X \circ f^{-1}}"] & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{F}(X) \arrow[d, two heads, "\pi_X"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_X"] & \\ \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}}"] & \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

とアーベル化の普遍性の一意性の部分から $\overline{\pi_X \circ f^{-1}} \circ \overline{\pi_Y \circ f} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}}}$ でなければならない．X と Y の役割を入れ換えると，同様にして $\overline{\pi_Y \circ f} \circ \overline{\pi_X \circ f^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}}}$ でなければならない．よって同型 $\mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \cong \mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}}$ が成り立つので，特に $\mathbb{Z}^{\oplus X} \cong \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} \cong \mathrm{F}(Y)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{\oplus Y}$ を得る． □

定理 4.18. 集合 X, Y で生成される自由群 $\mathrm{F}(X), \mathrm{F}(Y)$ について，$|X| = |Y| \iff \mathrm{F}(X) \cong \mathrm{F}(Y)$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) は明らか．($\Longleftarrow$) を示す．$\mathrm{F}(X) \cong \mathrm{F}(Y)$ とすると，命題 4.17 より $\mathbb{Z}^{\oplus X} \cong \mathbb{Z}^{\oplus Y}$ であるので，同型写像 $f\colon \mathbb{Z}^{\oplus X} \to \mathbb{Z}^{\oplus Y}$ を一つとる．2 元からなる体を $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と書くことにすると，自然な全射群準同型 $\pi_X\colon \mathbb{Z}^{\oplus X} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2^{\oplus X}, \pi_Y\colon \mathbb{Z}^{\oplus Y} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2^{\oplus Y}$ がとれる．このとき $\mathrm{Ker}(\pi_X) = \{\, x \in \mathbb{Z}^{\oplus X} \mid \exists x' \in \mathbb{Z}^{\oplus X}\ [x = x' + x'] \,\} \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_Y \circ f)$ であることが容易にわかるので，補題 4.1 より群準同型写像 $\overline{\pi_Y \circ f}\colon \mathbb{F}_2^{\oplus X} \to \mathbb{F}_2^{\oplus Y}$ で $\pi_Y \circ f = \overline{\pi_Y \circ f} \circ \pi_X$ をみたすものがとれる．同様にして，群準同型写像 $\overline{\pi_X \circ f^{-1}}\colon \mathbb{F}_2^{\oplus Y} \to \mathbb{F}_2^{\oplus X}$ で $\pi_X \circ f^{-1} = \overline{\pi_X \circ f^{-1}} \circ \pi_Y$ をみたすものがとれる．まとめると，図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{\oplus X} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_X"'] & \mathbb{Z}^{\oplus Y} \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, two heads, "\pi_Y"] \\ \mathbb{F}_2^{\oplus X} \arrow[r, shift left, "\overline{\pi_Y \circ f}"] & \mathbb{F}_2^{\oplus Y} \arrow[l, shift left, "\overline{\pi_X \circ f^{-1}}"] \end{tikzcd}$$

がある．このとき命題 4.17 の証明の後半と同様の議論によって $\overline{\pi_Y \circ f}$ と $\overline{\pi_X \circ f^{-1}}$ が互いに逆写像になっていることがわかるので，同型 $\mathbb{F}_2^{\oplus X} \cong \mathbb{F}_2^{\oplus Y}$ を得る (アーベル群として同型な $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間は，$\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間としても同型であることに注意)．よって，ベクトル空間の次元の一意性から $|X| = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathbb{F}_2^{\oplus X} = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathbb{F}_2^{\oplus Y} = |Y|$ を得る． □

注意 4.19.
(1) 定理 4.18 は命題 4.17 を経由せずに直接商写像 $\mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2^{\oplus X}$ を考えることによっても証明することができる (例えば [LS01, Theorem 1.1] など)．
(2) 環上の加群の理論では，定理 4.18 における「$\mathbb{Z}^{\oplus X} \cong \mathbb{Z}^{\oplus Y}$ ならば $|X| = |Y|$」という事実は加群の**テンソル積** (tensor product) の概念を用いて証明されることが多い．証明に際しては，任意の体 K について同型 $\mathbb{Z}^{\oplus X} \otimes_{\mathbb{Z}} K \cong (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} K)^{\oplus X} \cong K^{\oplus X}$ が成り立つことを用いる．詳細は例えば Atiyah–MacDonald [AM69, Chapter 2] などを参照のこと．

定義 4.20 (自由群の階数). 自由群 $F \cong \mathrm{F}(X)$ に対し，定理 4.18 より同型のとり方によらず一意に定まる濃度 $|X|$ のことを自由群 F の**階数** (rank) と呼び，記号 $\mathrm{rank}(F)$ で表す．また X が $|X| = n \in \mathbb{N}$ なる有限集合のとき，

$\mathrm{F}(X)$ のことを F_n とも書く．

補題 4.21.　集合 X で生成される自由群 $\mathrm{F}(X)$ が有限生成なら，X は有限集合である．

証明．有限な生成系 $S \subseteq \mathrm{F}(X)$ をとる．$X_0 := \{ x \in X \mid x$ または $\bar{x}$ が，S のある元を代表する被約語に含まれる $\}$ とおくと S が有限であることから $X_0 \subseteq X$ も有限集合である．一方で $\mathrm{F}(X) = \langle S \rangle \leq \mathrm{F}(X_0) \leq \mathrm{F}(X)$ でなければならないので $X = X_0$ となり，よって X は有限集合である． □

系 4.22.　G が有限生成な実質的自由群で $F \leq G$ が有限指数の自由部分群であるとき，$\mathrm{rank}(F)$ は有限である．

証明．F が自由群であることより，$F \cong \mathrm{F}(X)$ となる集合 X がとれる．このとき命題 3.8 より $\mathrm{F}(X)$ は有限生成であるから，補題 4.21 より $\mathrm{rank}(F) < \infty$ を得る． □

4.4　群の表示

群の表示とは，例えば $\mathbb{Z}^2 \cong \langle\, x, y \mid xy = yx \,\rangle$ (この同型の証明は以下の例 4.27 を見よ) のように，群を生成元 (左の x, y の部分) と関係式 (右の $xy = yx$ の部分) によって表す方法である．群の表示は数や行列，写像を用いた群の定義と異なり，次節以降で述べるような群の種々の構成法を記述するのに役立つ．

定義 4.23 (群の表示).　集合 X で生成される自由群 $\mathrm{F}(X)$ の部分集合 $R \subseteq \mathrm{F}(X)$ に対し，生成系 X と関係式 R からなる群の**表示** (presentation) を

$$\langle\, X \mid R \,\rangle := \mathrm{F}(X)/\langle\!\langle R \rangle\!\rangle$$

なる剰余群として定義する．X の元を**生成元** (generator)，R の元を**関係式** (relation) またはと呼ぶ．X と R がそれぞれ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ と $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ という有限集合のとき，$\langle\, X \mid R \,\rangle$ を $\langle\, x_1, x_2, \ldots, x_m \mid r_1, r_2, \ldots, r_n \,\rangle$ とも書き，このように表示される群を**有限表示群** (finitely presented group) という．関係式 $r \in R$ のことを $r = 1$ とも書く．また，元 $w \in \mathrm{F}(X)$ を用いて $rw = w$ とも書く．

群の表示を以下のように書き換え系の言葉で特徴付けておくと，より直感的に扱えて便利である．

命題 4.24.　集合 X と部分集合 $R \subseteq \mathrm{F}(X)$ に対し，自然な写像 $\pi\colon \Sigma_X^* \twoheadrightarrow \mathrm{F}(X)$ について $\pi(\tilde{R}) = R$ となる代表系 $\tilde{R} \subseteq \Sigma_X^*$ を $|\tilde{R}| = |R|$ となるようにとる．Σ_X 上の文字列書き換え系 $\mathrm{E}[\tilde{R}] \subseteq \Sigma_X^* \times \Sigma_X^*$ を $\mathrm{E}[\tilde{R}] := \{\, (r, \varepsilon) \mid r \in \tilde{R} \,\}$ で定義する[5]．このとき，群としての同型

$$\langle\, X \mid R \,\rangle \cong \Sigma_X^* / \underset{\mathrm{C}[X] \cup \mathrm{E}[\tilde{R}]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}}$$

が成り立つ．

命題 4.24 の証明のために，以下の補題を示す．

補題 4.25.　語 $u, v \in \Sigma_X^*$ に対し，以下の条件は同値である．

(1) $u \underset{\mathrm{C}[X] \cup \mathrm{E}[\tilde{R}]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}} v$.

[5] $\mathrm{E}[\tilde{R}]$ という記号も本稿だけのものゆえ，他所では通じないことに注意されたい (E は Eliminate ないし Erase の頭文字のつもり).

(2) ある語 $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma_X^*$ と $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n \in \tilde{R} \cup \bar{\tilde{R}}$ $(n \geq 0)$ について

$$v \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n).$$

(3) $\mathrm{F}(X)$ の元として $[u]^{-1}[v] \in \langle\!\langle R \rangle\!\rangle$.

証明．(1) $\Longrightarrow$ (2).　導出 $u \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftrightarrow}} v$ の長さに関する帰納法で示す．長さ 0 のとき $u = v$ なのでよい．導出の長さが 1 以上のとき，ある語 $u_1 \in \Sigma_X^*$ について $u \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftrightarrow}} u_1 \underset{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftrightarrow} v$ が成り立つ．帰納法の仮定より，ある語 $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma_X^*$ と $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n \in \tilde{R} \cup \bar{\tilde{R}}$ について

$$u_1 \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n)$$

と書ける．ここで，$u_1 \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow} v$ の場合は

$$v \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow} u_1 \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n)$$

なのでよい．次に，$u_1 \underset{\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftrightarrow} v$ の場合を考える．$u_1 \underset{\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longrightarrow} v$ のときは，$\mathrm{E}[\tilde{R}]$ の定義からある分解 $u_1 = u_1'\tilde{r}u_1''$ $(u_1', u_1'' \in \Sigma_X^*, \tilde{r} \in \tilde{R})$ があって $v = u_1'u_1''$ と書けるので

$$v = u_1'u_1'' \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u_1'\tilde{r}u_1''\bar{u}_1''\bar{\tilde{r}}u_1'' = u_1(\bar{u}_1''\bar{\tilde{r}}u_1'') \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n)(\bar{u}_1''\bar{\tilde{r}}u_1'')$$

を得る．$u_1 \underset{\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftarrow} v$ のときは，$\mathrm{E}[\tilde{R}]$ の定義からある分解 $v = v'\tilde{r}v''$ $(v', v'' \in \Sigma_X^*, \tilde{r} \in \tilde{R})$ があって $u_1 = v'v''$ と書けるので

$$v = v'\tilde{r}v'' \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} v'v''\bar{v}''\tilde{r}v'' = u_1(\bar{v}''\tilde{r}v'') \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n)(\bar{v}''\tilde{r}v'')$$

を得る．

(2) $\Longrightarrow$ (1).　$v \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n)$ のとき，一般に $\tilde{r} \in \tilde{R}$ ならば $\bar{\tilde{r}} \underset{\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftarrow} \bar{\tilde{r}}\tilde{r} \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} \varepsilon$ であることに注意すれば

$$u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n) \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\bar{w}_1)(w_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\bar{w}_n) \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} u$$

より $v \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]}{\Longleftrightarrow}} u$ を得る．

(2) $\Longleftrightarrow$ (3).　正規閉包の定義より

$$\begin{aligned}
[u]^{-1}[v] \in \langle\!\langle R \rangle\!\rangle &\iff [u]^{-1}[v] \in \langle \{\, [w]r[w]^{-1} \mid [w] \in \mathrm{F}(X), r \in R \,\} \rangle \\
&\iff \exists w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma_X^* \; \exists r_1, r_2, \ldots, r_n \in R^{\pm 1} \\
&\qquad [[v] = [u]([w_1]r_1[w_1]^{-1})([w_2]r_2[w_2]^{-1})\cdots([w_n]r_n[w_n]^{-1})] \\
&\iff \exists w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma_X^* \; \exists \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n \in \tilde{R} \cup \bar{\tilde{R}} \\
&\qquad [[v] = [u]([w_1][\tilde{r}_1][\bar{w}_1])([w_2][\tilde{r}_2][\bar{w}_2])\cdots([w_n][\tilde{r}_n][\bar{w}_n])] \\
&\iff \exists w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma_X^* \; \exists \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n \in \tilde{R} \cup \bar{\tilde{R}} \\
&\qquad [v \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longleftrightarrow}} u(w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n)]
\end{aligned}$$

となるのでよい． □

命題 4.24 の証明．自然な全射モノイド準同型写像 $\varphi\colon \Sigma_X^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]]{*} \twoheadrightarrow \mathrm{F}(X)/\langle\!\langle R\rangle\!\rangle = \langle\, X \mid R\,\rangle$ を，各同値類 $[w]_{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]} \in \Sigma_X^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]]{*}$ $(w \in \Sigma_X^*)$ に対し $\varphi([w]_{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]}) := [w]\langle\!\langle R\rangle\!\rangle$ で定義すると補題 4.25 の (1) $\Longrightarrow$ (3) より φ は well-defined であり，(3) $\Longrightarrow$ (1) より φ は単射である． □

群の表示について，一つ簡単な注意をしておく．

補題 4.26. どんな群 G も表示を持つ．すなわち，ある集合 X と部分集合 $R \subseteq \mathrm{F}(X)$ について $G \cong \langle\, X \mid R\,\rangle$ が成り立つ．さらに，G が有限群なら有限表示をもつ．

証明．系 4.16 より自由群からの全射 $\varphi\colon \mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow G$ がある．よって $R := \mathrm{Ker}(\varphi)$ とおけば $G \cong \mathrm{F}(X)/\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{F}(X)/\langle\!\langle \mathrm{Ker}(\varphi)\rangle\!\rangle = \mathrm{F}(X)/\langle\!\langle R\rangle\!\rangle = \langle\, X \mid R\,\rangle$ を得る．G が有限群のときは X は有限集合であり，よって命題 3.8 より有限指数部分群 $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq \mathrm{F}(X)$ は有限生成である．したがって $\mathrm{Ker}(\varphi)$ の有限な生成系 $R \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ をとれば $G \cong \mathrm{F}(X)/\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{F}(X)/\langle\!\langle R\rangle\!\rangle = \langle\, X \mid R\,\rangle$ を得る． □

例 4.27. **自由群 $\mathrm{F}(X)$.** どんな集合 X についても，関係式が空な表示は $\langle\, X \mid \,\rangle := \langle\, X \mid \emptyset\,\rangle = \mathrm{F}(X)/\{1\} \cong \mathrm{F}(X)$ となる．

巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 各自然数 $n \in \mathbb{N}$ について，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle\, x \mid x^n\,\rangle = \langle\, x \mid x^n = 1\,\rangle$ が成り立つ．実際，自然な群準同型 $f\colon \mathrm{F}(x) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; x \mapsto 1$ を考えれば，$\mathrm{F}(x) \cong \mathbb{Z}$ であることより $\mathrm{Ker}(f) = \langle x^n\rangle = \langle\!\langle x^n\rangle\!\rangle$ だから $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathrm{F}(x)/\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{F}(x)/\langle\!\langle x^n\rangle\!\rangle = \langle\, x \mid x^n\,\rangle$ を得る．

自由アーベル群 $\mathbb{Z}^{\oplus X}$. 集合 X について，$\mathbb{Z}^{\oplus X} \cong \langle\, X \mid \{\,[x,y] \in \mathrm{F}(X) \mid x, y \in X\,\}\,\rangle$ が成り立つ．実際，命題 4.17 と補題 4.6 より $\mathbb{Z}^{\oplus X} \cong \mathrm{F}(X)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{F}(X)/[\mathrm{F}(X), \mathrm{F}(X)] = \mathrm{F}(X)/\langle\!\langle \{\,[x,y] \mid x, y \in X\,\}\rangle\!\rangle = \langle\, X \mid \{\,[x,y] \mid x, y \in X\,\}\,\rangle$ を得る．よって例えば $\mathbb{Z}^2 \cong \langle\, x, y \mid [x,y]\,\rangle = \langle\, x, y \mid xy = yx\,\rangle$ がわかる ($[x,x] = [y,y] = 1_G, [y,x] = [x,y]^{-1}$ であることを用いた)．

次に，いくつかの有限群の有限表示を計算するために，簡単な補題を用意しておく．

補題 4.28. G を群，$f\colon \mathrm{F}(X) \to G$ を群準同型写像，$R \subseteq \mathrm{F}(X)$ を部分集合，$\pi\colon \mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow \langle\, X \mid R\,\rangle$ を商写像とする．このとき各 $r \in R$ について $f(r) = 1_G$ が成り立つならば，図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & G \\ \langle\, X \mid R\,\rangle \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $\bar{f}\colon \langle\, X \mid R\,\rangle \to G$ がただ一つ存在する．

証明．仮定より $\langle\!\langle R\rangle\!\rangle \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ だから，補題 4.1 より． □

例 4.29. **Klein の四元群 V_4.** Klein の四元群 $V_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ について，$V_4 \cong \langle\, x, y \mid x^2, y^2, [x,y]\,\rangle = \langle\, x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx\,\rangle$ が成り立つ．全射群準同型写像 $\varphi\colon \langle\, x, y \mid x^2, y^2, [x,y]\,\rangle \twoheadrightarrow V_4$ を $\varphi(x) := (1,0), \varphi(y) := (0,1)$ とおけば補題 4.28 より φ は well-defined である．$X := \{x, y\}, \tilde{R} := \{x^2, y^2, xy\bar{x}\bar{y}\} \subseteq \Sigma_X^*$ とおくと，命題 4.24 より $\langle\, x, y \mid x^2, y^2, [x,y]\,\rangle \cong \Sigma_X^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]]{*}$ である．このとき以下がわかる．

- $\bar{x} \xLeftarrow[\mathrm{E}[\tilde{R}]]{} \bar{x}x^2 \xRightarrow[\mathrm{C}[X]]{} x$ より $\bar{x} \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]]{*} x$ であり，同様に $\bar{y} \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]]{*} y$ である．
- $xy \xLeftarrow[\mathrm{C}[X]]{2} xy(\bar{x}(\bar{y}y)x) = xy\bar{x}\bar{y}\cdot yx \xRightarrow[\mathrm{E}[\tilde{R}]]{} yx$ より $xy \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}]]{*} yx$ である．

よってすべての語 $w \in \Sigma_X^*$ は ε, x, y, xy のいずれかに同値であるので，$|\langle\, x, y \mid x^2, y^2, [x, y]\,\rangle| \leq 4 = |V_4|$ より φ は全単射である．

位数 $2n$ の二面体群 D_n． 自然数 $n \geq 1$ について，$\sigma := \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$ とおく ($\mathrm{O}(2)$ は 2 次の直交群)．位数 $2n$ の二面体群 $D_n := \langle \sigma, \tau \rangle \leq \mathrm{O}(2)$ について，$D_n \cong \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n, \tau^2, (\tau\sigma)^2\,\rangle$ が成り立つ．実際，$G := \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n, \tau^2, (\tau\sigma)^2\,\rangle$ とおき，先程と同様に全射群準同型 $G \twoheadrightarrow D_n$ を考えると，G において $\sigma^{-1} = \sigma^{n-1}, \tau^{-1} = \tau, \tau\sigma = \sigma^{n-1}\tau$ が成り立つことから，G のどの元も $1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau$ のいずれかに等しい．よって $|G| \leq 2n = |D_n|$ より $G \cong D_n$ を得る．

また，$D_n \cong \langle\, \rho, \tau \mid \rho^2, \tau^2, (\rho\tau)^n\,\rangle$ も成り立つ．このことは $\rho := \sigma\tau \in \mathrm{O}(2)$ とおいて同様の議論をすればわかる．

注意 4.30. 有限群の有限表示を求める方法は例 4.29 の方法の他に，命題 3.8 を利用する方法もある．G を有限群，X を有限集合，$f\colon \mathrm{F}(X) \twoheadrightarrow G$ を全射群準同型写像とすると，$(\mathrm{F}(X) : \mathrm{Ker}(f)) = |G| < \infty$ より $\mathrm{Ker}(f)$ は $\mathrm{F}(X)$ の有限指数部分群だから，命題 3.8 を用いて $\mathrm{Ker}(f)$ の有限な生成系を求めることができる．

4.5　自由積

群の直積よりも高度な群の構成法として，ここでは自由積について取り扱う．自由群 $\mathrm{F}(X)$ は集合 X の元の形式的な積 (=語) からなる群であった．群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の自由積は各 G_λ の元の形式的な積からなる群であって，同じ群 G_λ の元どうしの積は G_λ の演算で計算できるような演算を備えたものである．

位相空間の基本群の観点からは，自由積は空間の **1 点和** (wedge sum) に相当するものである[6]．圏の言葉を用いれば，自由積とは群の圏における**直和** (direct sum) であり，アーベル群の直和の “非可換版” になっている．

定義 4.31 (自由積). 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とその表示 $G_\lambda = \langle\, X_\lambda \mid R_\lambda\,\rangle$ に対し，その**自由積** (free product) を

$$\mathop{\Huge\ast}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda := \left\langle\, \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;\middle|\; \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \,\right\rangle$$

と定義する．添字集合 Λ が有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ のときは自由積を $G_1 * G_2 * \cdots * G_n$ と書く．

一見すると自由積の定義は群そのものではなく群の表示に依存しているように見える．しかし，実は群の表示のとり方によらないことが次の普遍性を用いて示せる．

命題 4.32 (自由積の普遍性). 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とその表示 $G_\lambda = \langle\, X_\lambda \mid R_\lambda\,\rangle$ をとり，この表示に対応した自由積を $G := \ast_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ とおく．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し (補題 4.1 により) 自然に定まる写像を $i_\lambda\colon G_\lambda \to G$ とする．各 G_λ から群 H への群準同型写像 $f_\lambda\colon G_\lambda \to H$ があるとき，すべての図式

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & G \arrow[d, dashed, "f"] \\ & H \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $f\colon G \to H$ がただ一つ存在する．

[6] 細かいことを言えば，位相空間にいくらかの (単) 連結性を仮定する必要がある．

証明． G の定め方から，図式

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, hook, "\iota_\lambda"] \arrow[d, hook, "\tilde{\tilde{i}}_\lambda"] & \mathrm{F}(X_\lambda) \arrow[r, two heads, "\pi_\lambda"] \arrow[d, "\tilde{i}_\lambda"] & G_\lambda \arrow[d, "i_\lambda"] \\
\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathrm{F}\bigl(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\bigr) \arrow[r, two heads, "\pi"] & G
\end{tikzcd}$$

を可換にする自然な写像 $\iota_\lambda, \pi_\lambda, \tilde{\tilde{i}}_\lambda, \tilde{i}_\lambda, \iota, \pi$ がとれる．写像 $j\colon \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to H$ を各 $x_\lambda \in X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ について $j(x_\lambda) := f_\lambda \circ \pi_\lambda \circ \iota_\lambda(x_\lambda)$ と定義すると，自由群の普遍性 (命題 4.15) より $\tilde{f} \circ \iota = j$ となるような群準同型写像 $\tilde{f}\colon \mathrm{F}\bigl(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\bigr) \to H$ がただ一つ存在する．図式

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, bend left, "f_\lambda\circ\pi_\lambda\circ\iota_\lambda = j\restriction X_\lambda = j\circ\tilde{\tilde{i}}_\lambda = \tilde{f}\circ\iota\circ\tilde{\tilde{i}}_\lambda = \tilde{f}\circ\tilde{i}_\lambda\circ\iota_\lambda"] \arrow[d, hook, "\iota_\lambda"'] & H \\
\mathrm{F}(X_\lambda) \arrow[ur, bend left, "f_\lambda\circ\pi_\lambda"] \arrow[ur, bend right, "\tilde{f}\circ\tilde{i}_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

について，自由群の普遍性の一意性の部分から $f_\lambda \circ \pi_\lambda = \tilde{f} \circ \tilde{i}_\lambda$ でなければならない．よって各 $r \in R_\lambda$ に対し $\tilde{f}(r) = \tilde{f}(\tilde{i}_\lambda(r)) = f_\lambda(\pi_\lambda(r)) = f_\lambda(1_{G_\lambda}) = 1_H$ だから，補題 4.28 より $f \circ \pi = \tilde{f}$ となる群準同型写像 $f\colon G \to H$ がただ一つ存在する．まとめると，図式

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, hook, "\iota_\lambda"] \arrow[d, hook, "\tilde{\tilde{i}}_\lambda"'] & \mathrm{F}(X_\lambda) \arrow[r, two heads, "\pi_\lambda"] \arrow[d, "\tilde{i}_\lambda"'] & G_\lambda \arrow[d, "i_\lambda"'] \arrow[dr, "f_\lambda"] & \\
\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[rrr, bend right=40, "j"'] & \mathrm{F}\bigl(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\bigr) \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\tilde{f}"'] & G \arrow[r, dashed, "f"] & H
\end{tikzcd}$$

がある．このとき $f \circ i_\lambda \circ \pi_\lambda = f \circ \pi \circ \tilde{i}_\lambda = \tilde{f} \circ \tilde{i}_\lambda = f_\lambda \circ \pi_\lambda$ であるので，π_λ の全射性から $f \circ i_\lambda = f_\lambda$ を得る．

次に一意性を示すために，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $f \circ i_\lambda = f_\lambda$ となるような群準同型写像 $f\colon G \to H$ を任意にとる．各元 $g \in G$ について，G の定め方から有限個の元 $g_{\lambda(1)} \in G_{\lambda(1)}, g_{\lambda(2)} \in G_{\lambda(2)}, \ldots, g_{\lambda(n)} \in G_{\lambda(n)}$ $(\lambda(i) \in \Lambda)$ によって $g = i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)})i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)})\cdots i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})$ と書ける．このとき f の準同型性から

$$\begin{aligned}
f(g) &= f(i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)})i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)})\cdots i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})) \\
&= f(i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}))f(i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}))\cdots f(i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})) \\
&= f_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)})f_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)})\cdots f_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})
\end{aligned}$$

となるしかないので，条件をみたす f は高々一つである (存在は先程示した)．　□

系 4.33.　自由積は群の表示のとり方によらず，同型を除いて一意に定まる．

証明． 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，2 つの表示 $G_\lambda = \langle X_\lambda \mid R_\lambda \rangle \cong \langle X'_\lambda \mid R'_\lambda \rangle$ をとる．これらの表示に対応する自由積をそれぞれ $G := \langle \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \rangle, G' := \langle \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X'_\lambda \mid \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} R'_\lambda \rangle$ とおき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し自然に定まる写像 $i_\lambda\colon G_\lambda \to G, i'_\lambda\colon G_\lambda \to G'$ をとる．ここで自由積の普遍性 (命題 4.32) より $f \circ i_\lambda = i'_\lambda, f' \circ i'_\lambda = i_\lambda$ をみたす

群準同型写像 $f\colon G \to G', f'\colon G' \to G$ がただ一つ存在する．このとき 2 つの可換図式

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "f"] \\ G_\lambda \arrow[ur, "i_\lambda"] \arrow[r, "i'_\lambda"] \arrow[dr, "i_\lambda"'] & G' \arrow[d, "f'"] \\ & G \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\mathrm{id}_G"] \\ G_\lambda \arrow[ur, "i_\lambda"] \arrow[dr, "i_\lambda"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

と自由積の普遍性の一意性の部分から $f' \circ f = \mathrm{id}_G$ でなければならない．G と G' の役割を入れ換えれば，同様にして $f \circ f' = \mathrm{id}_{G'}$ もわかるので，同型 $G \cong G'$ を得る．□

系 4.34.　群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とその自由積 $G := \mathop{\scalebox{1.5}{$\ast$}}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ について，自然な写像 $i_\lambda\colon G_\lambda \to G$ はどれも単射である．すなわち，自然に部分群 $G_\lambda \leq \mathop{\scalebox{1.5}{$\ast$}}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ とみなすことができる．

証明．各 $\mu \in \Lambda$ に対し，群準同型写像 $f_\mu\colon G_\mu \to G_\lambda$ を

$$f_\mu = \begin{cases} \mathrm{id}_{G_\lambda} & (\mu = \lambda \text{ のとき}), \\ g_\mu \mapsto 1_{G_\lambda} & (\mu \neq \lambda \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．このとき自由積の普遍性 (命題 4.32) より，すべての図式

$$\begin{tikzcd} G_\mu \arrow[r, "i_\mu"] \arrow[dr, "f_\mu"'] & G \arrow[d, dashed, "f"] \\ & G_\lambda \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $f\colon G \to G_\lambda$ がただ一つ存在する．特に $\mu = \lambda$ のとき $f \circ i_\lambda = f_\lambda = \mathrm{id}_{G_\lambda}$ となるので，i_λ は単射である．□

例 4.35.
(1) 集合 X, Y に対し $\mathrm{F}(X) * \mathrm{F}(Y) \cong \mathrm{F}(X \sqcup Y)$ が成り立つ．実際，$\mathrm{F}(X) * \mathrm{F}(Y) \cong \langle\, X \mid \,\rangle * \langle\, Y \mid \,\rangle = \langle\, X \sqcup Y \mid \,\rangle \cong \mathrm{F}(X \sqcup Y)$ である．$F_1 \cong \mathbb{Z}$ であることより，特に $\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n} \cong F_n$ が成り立つ．より一般に，$\mathrm{F}(X) \cong \mathop{\scalebox{1.5}{$\ast$}}_{x\in X} \mathbb{Z}$ が成り立つ．
(2) $D_\infty := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle\, a, b \mid a^2, b^2 \,\rangle$ とおき，**無限二面体群** (infinite dihedral group) という．無限二面体群については 4.8 節でも扱う．
(3) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle\, s, r \mid s^2, r^3 \,\rangle$ のことを**モジュラー群** (modular group) という．モジュラー群については 4.7.4 節でも取り上げる．

群の表示に関する命題 4.24 のときと同様に，自由積も書き換え系を用いて表示することができる．群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，(有限とは限らない) アルファベット $\Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ を

$$\Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] := \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} (G_\lambda - \{1_{G_\lambda}\})$$

で定義する．文脈上明らかな場合には $\Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ を省略して単に $\Sigma[G_\lambda]$ とも書くことにする．文字列 $w \in \Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ のことを ($\Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ の) **語** (word) と呼ぶ[7]．各群の元 $g_\lambda \in G_\lambda$ を "文字化" する写像

[7] 自由群の定義における X 上の語 $w \in \Sigma_X^*$ と用語が衝突していて紛らわしいが，分野の慣習として語と呼んでいること，また他によい用語が思い付かなかったことから本稿でも単に語と呼ぶことにする．

$\underline{(\cdot)}\colon \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \to \Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] \cup \{\varepsilon\}$ を

$$\underline{g_\lambda} := \begin{cases} g_\lambda & (g_\lambda \neq 1_{G_\lambda} \text{ のとき}), \\ \varepsilon & (g_\lambda = 1_{G_\lambda} \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．すなわち，写像 $\underline{(\cdot)}$ は演算を群の演算から文字列の連接に変更する効果があり，例えば 2 元 $g, h \in G_\lambda - \{1_{G_\lambda}\}$ に対し $\underline{g}\,\underline{h} \in \Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ の文字列としての長さは 2 だが $\underline{gh} \in \Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ の長さは ($gh = 1_{G_\lambda}$ かもしれないので) 1 以下，などとなる．アルファベット $\Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ 上の文字列書き換え系 $\mathrm{S}[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] \subseteq \Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^* \times \Sigma[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ を

$$\mathrm{S}[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] := \{\, (\underline{g_\lambda}\,\underline{h_\lambda}, \underline{g_\lambda h_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda, g_\lambda, h_\lambda \in G_\lambda - \{1_{G_\lambda}\}\,\}$$

と定義する．こちらも文脈上明らかな場合には $\mathrm{S}[(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ を単に $\mathrm{S}[G_\lambda]$ とも書く．

命題 4.36. 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，群としての同型

$$\mathop{\Large\ast}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \cong \Sigma[G_\lambda]^* / \overset{*}{\underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longleftrightarrow}}$$

が成り立つ．

証明． 両辺をそれぞれ $G := \mathop{\ast}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, M := \Sigma[G_\lambda]^* / \overset{*}{\underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longleftrightarrow}}$ とおく．M に well-defined な商モノイドの構造が入ることは命題 1.17 よりよい．$G \cong M$ を証明するために，M が自由積の普遍性 (命題 4.32) と同じ条件をみたすことを示す．まず $\mathrm{S}[G_\lambda]$ の定義より，各 $g_\lambda \in G_\lambda$ に対し $[\underline{g_\lambda}]^{-1} = [\underline{g_\lambda^{-1}}]$ が成り立つ．よって M の各生成元が逆元を持つので，M は群である．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，写像 $i'_\lambda\colon G_\lambda \to M$ を $i'_\lambda(g_\lambda) := [\underline{g_\lambda}]$ で定める．任意の 2 元 $g_\lambda, h_\lambda \in G_\lambda$ に対し，$\mathrm{S}[G_\lambda]$ の定義から $\underline{g_\lambda h_\lambda} \overset{*}{\underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longleftrightarrow}} \underline{g_\lambda}\,\underline{h_\lambda}$ であるので ($g_\lambda = 1_{G_\lambda}$ または $h_\lambda = 1_{G_\lambda}$ のときにも成り立つことに注意)，$i'_\lambda(g_\lambda h_\lambda) = [\underline{g_\lambda h_\lambda}] = [\underline{g_\lambda}\,\underline{h_\lambda}] = [\underline{g_\lambda}][\underline{h_\lambda}] = i'_\lambda(g_\lambda) i'_\lambda(h_\lambda)$ となり，i'_λ は群準同型写像である．H を群とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $f_\lambda\colon G_\lambda \to H$ を群準同型写像とする．写像 $f\colon M \to H$ を，各元 $[w] \in M$ ($w = \underline{g_{\lambda(1)}}\,\underline{g_{\lambda(2)}} \cdots \underline{g_{\lambda(n)}} \in \Sigma[G_\lambda]^*, g_{\lambda(i)} \in G_{\lambda(i)} - \{1_{G_{\lambda(i)}}\}$) に対し

$$f([w]) := f_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}) f_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}) \cdots f_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)}) \tag{4.1}$$

と定義する．ここで f が well-defined であるためには，$u \underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longrightarrow} v$ ならば $f([u]) = f([v])$ であることを言えば十分であるが，これは $\mathrm{S}[G_\lambda]$ の定義から明らかである．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し明らかに $f \circ i'_\lambda = f_\lambda$ が成り立つので，可換図式

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "i'_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & H \end{tikzcd}$$

を得る．逆に，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対しこの図式が可換であるためには f を (4.1) のように定めるしかない．以上より，系 4.33 と同様の方法で同型 $G \cong M$ を得る． □

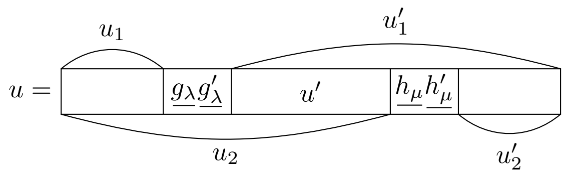
次に，書き換え系 $\mathrm{S}[G_\lambda]$ に関する被約語について議論する．w が抽象書き換え系 $\mathrm{S}[G_\lambda]$ に関して正規形 (定義 1.9) であるとき，w を**被約語** (reduced word) と呼ぶ．すなわち，被約語とは $\mathrm{IRR}(\mathrm{S}[G_\lambda])$ の元のことである．容易にわかるように，語 $w = \underline{g_{\lambda(1)}}\,\underline{g_{\lambda(2)}} \cdots \underline{g_{\lambda(n)}} \in \Sigma[G_\lambda]^*$ ($g_{\lambda(i)} \in G_{\lambda(i)} - \{1\}$) が被約語であることと，$1 \leq i < n$ ならば $\lambda(i) \neq \lambda(i+1)$ であることは同値である．被約語に対しては文字列の連接と群における積を区別する必要がないことから，$w = g_{\lambda(1)} g_{\lambda(2)} \cdots g_{\lambda(n)}$ と書いても曖昧さを生じないことに注意する．また，命題 4.36 より $\Sigma[G_\lambda]^*$ の語を自由積の元とみなすことができ，逆に自由積のどの元も $\Sigma[G_\lambda]^*$ のある語によって表せる．

命題 4.12 の場合と概ね同様にして次が証明できる．

命題 4.37. $\Sigma[G_\lambda]$ 上の文字列書き換え系 $\mathrm{S}[G_\lambda]$ は強合流的かつ短縮的である．

証明．短縮的であることは明らか．強合流的であることを示す．語 $u, v_1, v_2 \in \Sigma[G_\lambda]^*$ について，$v_1 \underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longleftarrow} u \underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longrightarrow} v_2$ であるとする．$\mathrm{S}[G_\lambda]$ の定義から，ある分解 $u = u_1\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda}u'_1 = u_2\underline{h_\mu}\underline{h'_\mu}u'_2$ $(u_1, u'_1, u_2, u'_2 \in \Sigma[G_\lambda]^*, g_\lambda, g'_\lambda \in G_\lambda - \{1\}, h_\mu, h'_\mu \in G_\mu - \{1\})$ について $v_1 = u_1\underline{g_\lambda g'_\lambda}u'_1$ かつ $v_2 = u_2\underline{h_\mu h'_\mu}u'_2$ となっている．対称性から $u_1 \preccurlyeq u_2$ として一般性を失わない．書き換えられる部分 $\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda}, \underline{h_\mu}\underline{h'_\mu}$ の重なり方によって場合分けする．

($|u_2| \geq |u_1| + 2$ のとき) これは $\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda}$ と $\underline{h_\mu}\underline{h'_\mu}$ に重なりがないということだから $u_2 = u_1\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda}u'$ $(u' \in \Sigma[G_\lambda]^*)$ と分解でき，このとき $u'_1 = u'\underline{h_\mu}\underline{h'_\mu}u'_2$ でもあるから $v_1 = u_1\underline{g_\lambda g'_\lambda}u'_1 = u_1\underline{g_\lambda g'_\lambda}u'\underline{h_\mu}\underline{h'_\mu}u'_2 \underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longrightarrow} u_1\underline{g_\lambda g'_\lambda}u'\underline{h_\mu h'_\mu}u'_2 \underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longleftarrow} u_1\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda}u'\underline{h_\mu h'_\mu}u'_2 = u_2\underline{h_\mu h'_\mu}u'_2 = v_2$ となる．



($|u_2| = |u_1| + 1$ のとき) このとき $\underline{g'_\lambda} = \underline{h_\mu}$ でなければならないから，特に $\lambda = \mu$ かつ $u = u_1\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda}\underline{h'_\lambda}u'_2$ であるので $v_1 = u_1\underline{g_\lambda g'_\lambda}\underline{h'_\lambda}u'_2 \underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longrightarrow} u_1\underline{g_\lambda g'_\lambda h'_\lambda}u'_2 \underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longleftarrow} u_1\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda h'_\lambda}u'_2 = v_2$ となる．

($u_1 = u_2$ のとき) このとき $\underline{g_\lambda}\underline{g'_\lambda} = \underline{h_\mu}\underline{h'_\mu}$ だから $v_1 = v_2$ となる． □

系 4.13 の場合と同様にして次がわかる．

系 4.38. $\Sigma[G_\lambda]^*$ の語 $w \in \Sigma[G_\lambda]^*$ に対し，w と同値な被約語 $w{\downarrow} \in \mathrm{IRR}(\mathrm{S}[G_\lambda])$ がただ一つ存在する．

証明．命題 4.37 より $\mathrm{S}[G_\lambda]$ は収束的だから定理 1.10 より． □

次に，自由積がいつねじれを持つかについて調べる．

定義 4.39 (巡回被約). 語 $w = \underline{g_{\lambda(1)}}\underline{g_{\lambda(2)}}\cdots\underline{g_{\lambda(n)}} \in \Sigma[G_\lambda]^*$ $(g_{\lambda(i)} \in G_{\lambda(i)} - \{1\})$ が**巡回被約である** (cyclically reduced) とは，$n \geq 2$ かつ w が被約語であり，さらに $\lambda(1) \neq \lambda(n)$ であることである．

$\mathrm{S}[G_\lambda]$ の定義から容易にわかるように，巡回被約な語 $w \in \Sigma[G_\lambda]^*$ の冪は被約語となるから，w は自由積 $\Sigma[G_\lambda]^*/\underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}}$ において無限の位数を持つ．

補題 4.40 ([Ser80, Chapter I, §1.3, Proposition 2]). 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の自由積 $G = \Sigma[G_\lambda]^*/\underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}}$ において，どんな語 $w \in \Sigma[G_\lambda]^*$ も，ある G_λ の元または巡回被約な語のいずれかと共役である．

証明．被約語 $w = g_{\lambda(1)}g_{\lambda(2)}\cdots g_{\lambda(n)} \in \Sigma[G_\lambda]^*$ $(g_{\lambda(i)} \in G_{\lambda(i)} - \{1\})$ をとる．n に関する帰納法で示す．$n \leq 1$ のときは明らかだから，$n \geq 2$ とする．w が巡回被約なら示すことはないので，巡回被約でないと仮定する．このとき $\lambda(1) = \lambda(n)$ であるから，G において等式

$$g_{\lambda(n)}wg_{\lambda(n)}^{-1} = \underline{g_{\lambda(n)}g_{\lambda(1)}}g_{\lambda(2)}\cdots g_{\lambda(n-1)}$$

が成り立ち，右辺の $\Sigma[G_\lambda]^*$ の語としての長さは $g_{\lambda(n)}g_{\lambda(1)} = 1$ かどうかに応じて $n-2$ または $n-1$ であるので，帰納法の仮定から $g_{\lambda(n)}wg_{\lambda(n)}^{-1}$ は空文字列でなければある G_λ の元または巡回被約語のいずれかと共役である．よって w もそうである． □

系 4.41. 自由積 $\Sigma[G_\lambda]^*/\overset{*}{\underset{\mathrm{S}[G_\lambda]}{\Longleftrightarrow}}$ において有限位数の元はある G_λ の元に共役である．よって特に，ねじれがない (torsion-free) 群の族の自由積もねじれがない．

証明． 補題 4.40 より． □

系 4.42. どんな集合 X に対しても，自由群 $\mathrm{F}(X)$ はねじれがない．

証明． 例 4.35.(1) と系 4.41 より． □

注意 4.43. 系 4.42 の事実は自由群の定義から直接示すこともできる．例えば [LS01, Proposition I.2.16] など．

最後に，自由積がわかりやすい自由部分群を持つことを見て本節を終える．以下の定理とその証明の中では系 4.34 を用いて $A, B \subseteq A * B$ とみなしている．

定理 4.44 ([Ser80, Chapter I, §1.3, Proposition 4])**.** 2 つの群 A, B に対し，自然な全射群準同型写像 $f\colon A * B \twoheadrightarrow A \times B$ が存在し，$X := \{\, [a, b] \mid a \in A - \{1_A\}, b \in B - \{1_B\}\,\} \subseteq A * B$ とおくと同型 $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{F}(X)$ が成り立つ．

証明． 自然な群準同型写像 $A \to A \times B; a \mapsto (a, 1_B)$ と $B \to A \times B; b \mapsto (1_A, b)$ に対して自由積の普遍性 (命題 4.32) を適用することで群準同型写像 $f\colon A * B \to A \times B$ が得られる．このとき各元 $(a, b) \in A \times B$ に対して $ab \in A * B$ をとれば $f(ab) = f(a)f(b) = (a, 1_B)(1_A, b) = (a, b)$ となるので f は全射である．直積 $A \times B$ における演算の定め方から $X \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ であるので，包含写像 $X \hookrightarrow \mathrm{Ker}(f)$ に対し自由群の普遍性 (命題 4.15) を適用することで自然な群準同型写像 $\varphi\colon \mathrm{F}(X) \to \mathrm{Ker}(f)$ が得られる．φ が全単射であることを言えばよい．

(φ が全射であること) φ の定め方より，$A * B$ において $\langle X \rangle = \mathrm{Ker}(f)$ であることを示せば十分である．$\langle X \rangle \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ は明らか．まず，任意の $a, a_1 \in A - \{1\}, b, b_1 \in B - \{1\}$ に対し，

- $a_1[a, b]a_1^{-1} = a_1aba^{-1}b^{-1}a_1^{-1} = a_1aba^{-1}(a_1^{-1}b^{-1}ba_1)b^{-1}a_1^{-1} = (a_1a)b(a_1a)^{-1}b^{-1} \cdot ba_1b^{-1}a_1^{-1} = [a_1a, b][b, a_1] = [a_1a, b][a_1, b]^{-1} \in \langle X \rangle$,
- $b_1[a, b]b_1^{-1} = b_1aba^{-1}b^{-1}b_1^{-1} = b_1a(b_1^{-1}a^{-1}ab_1)ba^{-1}b^{-1}b_1^{-1} = b_1ab_1^{-1}a^{-1} \cdot a(b_1b)a^{-1}(b_1b)^{-1} = [b_1, a][a, b_1b] = [a, b_1]^{-1}[a, b_1b] \in \langle X \rangle$

となるので $\langle X \rangle \lhd A * B$ が成り立つ．任意の元 $w \in A * B$ は $w = a_1b_1a_2b_2 \cdots a_nb_n$ ($a_i \in A, b_i \in B$, $a_i = 1_A$ や $b_i = 1_B$ でもよい) の形に表せる．$w \in \mathrm{Ker}(f)$ と仮定すると $(1_A, 1_B) = f(w) = (a_1, 1_B)(1_A, b_1)(a_2, 1_B)(1_A, b_2) \cdots (a_n, 1_B)(1_A, b_n) = (a_1a_2 \cdots a_n, b_1b_2 \cdots b_n)$ が成り立つ．このとき，任意の元 $u, v \in A * B, a \in A, b \in B$ に対し $ubav\langle\!\langle X \rangle\!\rangle = ubav \cdot v^{-1}[a^{-1}, b^{-1}]v\langle\!\langle X \rangle\!\rangle = uabv\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ であることを繰り返し用いると，$w\langle\!\langle X \rangle\!\rangle = a_1b_1a_2b_2 \cdots a_nb_n\langle\!\langle X \rangle\!\rangle = a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_n\langle\!\langle X \rangle\!\rangle = 1_A1_B\langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ となるので $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \langle X \rangle$ を得る．

(φ が単射であること) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1\}$ を示す．集合 X 上の自由被約語 $w \in \Sigma_X^*$ で $w \neq \varepsilon$ であるものを任意にとる．このとき，$|w|$ に関する帰納法で次を示す．

(1) 語 $\varphi(w) \in \Sigma[A, B]^*$ に対応するただ一つの被約語 $\varphi(w)\!\downarrow\, \in \Sigma[A, B]^*$ の $\Sigma[A, B]^*$ の語としての長さ $|\varphi(w)\!\downarrow\!|$ は $|w| + 3$ 以上である．

(2) w の先頭の文字が $[a, b] \in X$ ならば，$\varphi(w)\!\downarrow\, \in \Sigma[A, B]^*$ は ab で始まり，w の先頭の文字が $\overline{[a, b]} \in \bar{X}$ ならば $\varphi(w)\!\downarrow\, \in \Sigma[A, B]^*$ は ba で始まる．

$|w| = 1$ のとき，$\mathrm{S}[A, B]$ の定め方から $\varphi(w)$ は $\Sigma[A, B]^*$ の被約語で長さは 4 である．自由被約語 $w = x_1x_2 \cdots x_n \in \Sigma_X^*$ について主張が成り立つと仮定する．

($x_1 = [a_1, b_1] \in X$ のとき) 帰納法の仮定より $\varphi(w) = a_1b_1s_1s_2 \cdots s_p$ ($s_i \in \Sigma[A, B], p \geq n + 1$) は $\Sigma[A, B]^*$

の被約語である．このとき $x_0 = [a_0, b_0] \in X$ に対し，$\varphi(x_0 w) = a_0 b_0 a_0^{-1} b_0^{-1} a_1 b_1 s_1 s_2 \cdots s_p$ は $\Sigma[A,B]^*$ の被約語であり，長さは $n+7$ 以上である．次に，$\bar{x}_0 w$ が自由被約語であるためには $x_0 \neq x_1$ でなければならないから $a_0 \neq a_1$ または $b_0 \neq b_1$ でなければならない．$a_0 \neq a_1$ の場合は $\varphi(\bar{x}_0 w) = b_0 a_0 b_0^{-1} \underline{a_0^{-1} a_1} b_1 s_1 s_2 \cdots s_p$ は $\Sigma[A,B]^*$ の被約語であり，長さは $n+6$ 以上である．$a_0 = a_1$ かつ $b_0 \neq b_1$ の場合は $\varphi(\bar{x}_0 w) = b_0 a_0 \underline{b_0^{-1} b_1} s_1 s_2 \cdots s_p$ は $\Sigma[A,B]^*$ の被約語であり，長さは $n+4$ 以上である．

($x_1 = \overline{[a_1, b_1]} \in \bar{X}$ のとき) 帰納法の仮定より $\varphi(w) = b_1 a_1 s_1 s_2 \cdots s_p$ ($s_i \in \Sigma[A,B], p \geq n+1$) は $\Sigma[A,B]^*$ の被約語である．このとき $x_0 = [a_0, b_0] \in X$ に対し，$\varphi(\bar{x}_0 w) = b_0 a_0 b_0^{-1} a_0^{-1} b_1 a_1 s_1 s_2 \cdots s_p$ は $\Sigma[A,B]^*$ の被約語であり，長さは $n+7$ 以上である．次に，$x_0 w$ が自由被約語であるためには $x_0 \neq x_1$ でなければならないから $a_0 \neq a_1$ または $b_0 \neq b_1$ でなければならない．$b_0 \neq b_1$ の場合は $\varphi(x_0 w) = a_0 b_0 a_0^{-1} \underline{b_0^{-1} b_1} a_1 s_1 s_2 \cdots s_p$ は $\Sigma[A,B]^*$ の被約語であり，長さは $n+6$ 以上である．$b_0 = b_1$ かつ $a_0 \neq a_1$ の場合は $\varphi(x_0 w) = a_0 b_0 \underline{a_0^{-1} a_1} s_1 s_2 \cdots s_p$ は $\Sigma[A,B]^*$ の被約語であり，長さは $n+4$ 以上である．

以上より $\varphi(w) \neq 1$ を得る． □

系 4.45. A, B が有限群のとき，自由積 $A * B$ は指数が $|A| \cdot |B|$ で階数が $(|A|-1)(|B|-1)$ の自由部分群を持ち，よって特に実質的自由群である．

証明．定理 4.44 より． □

例 4.46. (1) 無限二面体群 $D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は指数が 4 で階数が 1 の自由部分群を持つ．すなわち，D_∞ は実質的巡回群である．実は D_∞ は指数が 2 の無限巡回部分群を持つのだが，このことの証明は例 4.81 で行う．

(2) モジュラー群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は指数が 6 で階数が 2 の自由部分群を持つ．

4.6 融合積

融合積は自由積を少しだけ一般化したものである．自由積 $G = \mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ においては $\lambda \neq \mu$ ならば G_λ と G_μ の G における像の共通部分は自明群であったが，融合積においては G_λ たちの像が非自明な共通部分を持ちうる．

位相空間の基本群の観点からは，融合積は空間を連結開集合で “貼り合わせる” 操作に相当するものである[8]．圏の言葉を用いれば，融合積とは群の圏における**押し出し** (pushout) に相当する構成法である．

定義 4.47 (融合積). 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と群 A からの群準同型写像の族 $(\iota_\lambda \colon A \to G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，その**融合積** (free product with amalgamation, amalgamated (free) product) を

$$\mathop{\ast}_{A} G_\lambda := \left(\mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \right) / \langle\!\langle \{ i_\lambda(\iota_\lambda(a))^{-1} i_\mu(\iota_\mu(a)) \mid \lambda, \mu \in \Lambda, a \in A \} \rangle\!\rangle$$

と定義する (ただし，$i_\lambda \colon G_\lambda \hookrightarrow \mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は系 4.34 の単射である)．添字集合が $\Lambda = \{1, 2\}$ のときは融合積を $G_1 *_A G_2$ と書く．

自由積の場合と同様に，融合積も普遍性をみたす．

命題 4.48 (融合積の普遍性). 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と群 A からの群準同型写像の族 $(\iota_\lambda \colon A \to G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ をとり，その融合積を $G := \mathop{\ast}_A G_\lambda$，商写像を $\pi \colon \mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \twoheadrightarrow G$ とおく．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，$j_\lambda := \pi \circ i_\lambda$ とおく．融合積 G の定義より，各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $j_\lambda \circ \iota_\lambda = j_\mu \circ \iota_\mu$ が成り立つ．群 H と群準同型写像の族 $(f_\lambda \colon G_\lambda \to H)_{\lambda \in \Lambda}$ が各

[8] もちろん，細かいことを言えば空間に適切な (単) 連結性を課す必要がある．

$\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $f_\lambda \circ \iota_\lambda = f_\mu \circ \iota_\mu$ をみたすとき，図式

$$\begin{tikzcd}
& G_\lambda \arrow[dr, "j_\lambda"] \arrow[drr, bend left, "f_\lambda"] & & \\
A \arrow[ur, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "\iota_\mu"'] & & G \arrow[r, dashed, "f"] & H \\
& G_\mu \arrow[ur, "j_\mu"] \arrow[urr, bend right, "f_\mu"'] & &
\end{tikzcd}$$

をすべての $\lambda, \mu \in \Lambda$ について可換にする群準同型写像 $f\colon G \to H$ がただ一つ存在する．

証明．$N := \langle\!\langle \{ i_\lambda(\iota_\lambda(a))^{-1} i_\mu(\iota_\mu(a)) \mid \lambda, \mu \in \Lambda, a \in A \} \rangle\!\rangle$ とおくと，$G = \mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda / N$ と書ける．自由積の普遍性 (命題 4.32) より各 $\lambda \in \Lambda$ について $\tilde{f} \circ i_\lambda = f_\lambda$ となる群準同型写像 $\tilde{f}\colon \mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \to H$ がただ一つ存在する．命題 4.36 から自由積 $\mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ の任意の元はある被約語 $g_{\lambda(1)} g_{\lambda(2)} \cdots g_{\lambda(n)} \in \Sigma[G_\lambda]^*$ によって $i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}) i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}) \cdots i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})$ と書け，よってその商である融合積 G のどの元も $j_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}) j_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}) \cdots j_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})$ の形に書ける．よって，命題の図式が可換であるためには，f が群準同型写像でなければならないことから

$$\begin{aligned}
(f \circ \pi)(i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}) i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}) \cdots i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})) &= f(\pi(i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)})) \pi(i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)})) \cdots \pi(i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)}))) \\
&= f(j_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}) j_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}) \cdots j_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})) \\
&= f(j_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)})) f(j_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)})) \cdots f(j_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})) \\
&= f_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}) f_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}) \cdots f_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)}) \\
&= \tilde{f}(i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)})) \tilde{f}(i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)})) \cdots \tilde{f}(i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)})) \\
&= \tilde{f}(i_{\lambda(1)}(g_{\lambda(1)}) i_{\lambda(2)}(g_{\lambda(2)}) \cdots i_{\lambda(n)}(g_{\lambda(n)}))
\end{aligned}$$

でなければならない．すなわち，$f \circ \pi = \tilde{f}$ が成り立たなければならない．まとめると，図式

$$\begin{tikzcd}
& G_\lambda \arrow[r, hook, "i_\lambda"] \arrow[ddr, "j_\lambda"] \arrow[drr, bend left=50, "f_\lambda"] & \mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \arrow[dd, two heads, "\pi"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\
A \arrow[ur, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "\iota_\mu"'] & & & H \\
& G_\mu \arrow[uur, hook, "i_\mu"] \arrow[r, "j_\mu"'] \arrow[urr, bend right=50, "f_\mu"'] & \mathop{\ast}_A G_\lambda \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

がある．このように定義される f が well-defined であることを示す．実際，各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ と $a \in A$ に対し，

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(i_\lambda(\iota_\lambda(a))^{-1} i_\mu(\iota_\mu(a))) &= \tilde{f}(i_\lambda(\iota_\lambda(a)))^{-1} \tilde{f}(i_\mu(\iota_\mu(a))) \\
&= f_\lambda(\iota_\lambda(a))^{-1} f_\mu(\iota_\mu(a)) \\
&= 1_H && (\text{仮定より } f_\lambda \circ \iota_\lambda = f_\mu \circ \iota_\mu \text{ だから})
\end{aligned}$$

だから $N \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{f})$ となり，よって補題 4.1 より f は well-defined である．　□

例 4.49.　(1) 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $\mathop{\ast}_{\{1\}} G_\lambda \cong \mathop{\ast}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ が成り立つ．すなわち，融合積は実際に自由積の一般化になっている．

(2) 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ がある群 G について $\forall\lambda\in\Lambda\ [G_\lambda = G]$ となっているとき，群準同型写像の族 $(\mathrm{id}_G\colon G_\lambda \to G)_{\lambda\in\Lambda}$ について $\mathop{\ast}_G G_\lambda \cong G$ が成り立つ．この同型を確かめるためには G が融合積の普遍性をみたすことを確かめれば十分であるが，これは以下の図式から容易にわかる．

$$\begin{tikzcd}
 & G_\lambda \arrow[dr, equal, "j_\lambda=\mathrm{id}_G"'] \arrow[drr, bend left, "f_\lambda"] & & \\
G \arrow[ur, equal, "\iota_\lambda=\mathrm{id}_G"] \arrow[dr, equal, "\iota_\mu=\mathrm{id}_G"'] & & G \arrow[r, dashed, "f"] & H. \\
 & G_\mu \arrow[ur, equal, "j_\mu=\mathrm{id}_G"] \arrow[urr, bend right, "f_\mu"'] & &
\end{tikzcd}$$

(3) 群の図式 $G_1 \xleftarrow{\mathrm{id}_{G_1}} G_1 \xrightarrow{\iota_2} G_2$ に対し，$G_1 *_{G_1} G_2 \cong G_2$ が成り立つ．この同型を確かめるためには G_2 が融合積の普遍性をみたすことを確かめれば十分であるが，これは以下の図式から容易にわかる．

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "j_1=\iota_2"'] \arrow[drr, bend left, "f_1"] & & \\
G_1 \arrow[ur, equal, "\iota_1=\mathrm{id}_{G_1}"] \arrow[dr, "\iota_2"'] & & G_2 \arrow[r, dashed, "f=f_2"] & H. \\
 & G_2 \arrow[ur, equal, "j_2=\mathrm{id}_{G_2}"] \arrow[urr, bend right, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

もう少し複雑な例は 4.7.4 節で与える．

前節の自由積に対する語の議論を融合積に対して拡張しよう．群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と群 A からの**単射**群準同型写像の族 $(\iota_\lambda\colon A \hookrightarrow G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．各 $\lambda\in\Lambda$ に対し，$\iota_\lambda(A)\backslash G_\lambda$ の完全代表系 C_λ であって $1_{G_\lambda}\in C_\lambda$ となるものをとる．このとき (有限とは限らない) アルファベット $\Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ を

$$\Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] := (A - \{1_A\}) \sqcup \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} (C_\lambda - \{1_{G_\lambda}\})$$

と定義する．文脈上明らかな場合には $\Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ を単に $\Sigma[A;G_\lambda]$ とも書くことにする．文字列 $w \in \Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ のことを $(\Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ の) **語** (word) と呼ぶ．各元 $c_\lambda \in C_\lambda$ や $a\in A$ を "文字化" する写像 $\underline{(\cdot)}\colon A \sqcup \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \to \Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] \cup \{\varepsilon\}$ を

$$\underline{a} := \begin{cases} a & (a \neq 1_A \text{ のとき}), \\ \varepsilon & (a = 1_A \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (a\in A \text{ のとき}),$$
$$\underline{c_\lambda} := \begin{cases} c_\lambda & (c_\lambda \neq 1_{G_\lambda} \text{ のとき}), \\ \varepsilon & (c_\lambda = 1_{G_\lambda} \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (c_\lambda\in C_\lambda \text{ のとき})$$

と定める．アルファベット $\Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ 上の文字列書き換え系 $\mathrm{S}[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] \subseteq \Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^* \times \Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]^*$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] := &\{\, (\underline{a_1}\,\underline{a_2}, \underline{a_1a_2}) \mid a_1,a_2 \in A - \{1_A\} \,\} \\
&\cup \{\, (\underline{c_\lambda}\,\underline{a}, \underline{b}\,\underline{d_\lambda}) \mid \lambda\in\Lambda, c_\lambda \in C_\lambda - \{1_{G_\lambda}\}, d_\lambda \in C_\lambda, a \in A - \{1_A\}, b\in A, c_\lambda\iota_\lambda(a) = \iota_\lambda(b)d_\lambda \,\} \\
&\cup \{\, (\underline{c_\lambda}\,\underline{d_\lambda}, \underline{a}\,\underline{e_\lambda}) \mid \lambda\in\Lambda, c_\lambda, d_\lambda \in C_\lambda - \{1_{G_\lambda}\}, e_\lambda \in C_\lambda, a\in A, c_\lambda d_\lambda = \iota_\lambda(a)e_\lambda \,\}
\end{aligned}$$

と定義する．こちらも文脈上明らかな場合には $\mathrm{S}[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ を単に $\mathrm{S}[A;G_\lambda]$ とも書く．

命題 4.50. 群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と群 A からの**単射**群準同型写像の族 $(\iota_\lambda\colon A\hookrightarrow G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，群としての同型

$$\mathop{\ast}_{A} G_\lambda \cong \Sigma[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\lambda}]^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{S}[A;(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]]{*}$$

が成り立つ．

証明． 両辺をそれぞれ $G:=\ast_A G_\lambda$, $M:=\Sigma[A;G_\lambda]^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{*}$ とおく．M に well-defined な商モノイドの構造が入ることは命題 1.17 よりよい．$G\cong M$ を証明するために，M が融合積の普遍性 (命題 4.48) と同じ条件をみたすことを示す．まず M が群であることを示す．$a\in A$ に対しては，$\mathrm{S}[A;G_\lambda]$ の定義より $[\underline{a}][\underline{a^{-1}}]=[\varepsilon]=[\underline{a^{-1}}][\underline{a}]$ だから $[\underline{a}]^{-1}=[\underline{a^{-1}}]$ となる．$c_\lambda\in C_\lambda-\{1\}$ をとると，ι_λ が単射であることと C_λ が $\iota_\lambda(A)\backslash G_\lambda$ の完全代表系であることより $c_\lambda^{-1}=\iota_\lambda(a)d_\lambda$ となる組 $(a,d_\lambda)\in A\times C_\lambda$ がただ一つ存在する．このとき $d_\lambda c_\lambda=\iota_\lambda(a^{-1})$ かつ $c_\lambda\iota_\lambda(a)=d_\lambda^{-1}$ だから，$\mathrm{S}[A;G_\lambda]$ の定義から

$$\begin{aligned}[\underline{c_\lambda}][\underline{a}\,\underline{d_\lambda}]&=[\underline{c_\lambda}\,\underline{a}][\underline{d_\lambda}]=[\underline{d_\lambda^{-1}}][\underline{d_\lambda}]=[\varepsilon],\\ [\underline{a}\,\underline{d_\lambda}][\underline{c_\lambda}]&=[\underline{a}][\underline{d_\lambda}\,\underline{c_\lambda}]=[\underline{a}][\underline{a^{-1}}]=[\varepsilon]\end{aligned}$$

となるので $[\underline{c_\lambda}]^{-1}=[\underline{a}\,\underline{d_\lambda}]$ を得，よって M の各生成元が逆元を持つので M は群である．各 $\lambda\in\Lambda$ に対し，写像 $j'_\lambda\colon G_\lambda\to M$ を，$g_\lambda=\iota_\lambda(a)c_\lambda$ となる唯一の組 $(a,c_\lambda)\in A\times C_\lambda$ を用いて $j'_\lambda(g_\lambda):=[\underline{a}\,\underline{c_\lambda}]$ で定める．任意に 2 元 $g_\lambda,h_\lambda\in G_\lambda$ をとり，$g_\lambda=\iota_\lambda(a_1)c_\lambda^{(1)}, h_\lambda=\iota_\lambda(a_2)c_\lambda^{(2)}, g_\lambda h_\lambda=\iota_\lambda(a_3)c_\lambda^{(3)}, c_\lambda^{(1)}\iota_\lambda(a_2)=\iota_\lambda(a_4)c_\lambda^{(4)}$ となる唯一の組 $(a_i,c_\lambda^{(i)})\in A\times C_\lambda$ $(i=1,2,3,4)$ をとる．このとき $c_\lambda^{(4)}c_\lambda^{(2)}=\iota_\lambda(a_4^{-1}a_1^{-1}a_3)c_\lambda^{(3)}$ だから，$\mathrm{S}[A;G_\lambda]$ の定義より

$$\begin{aligned}j'_\lambda(g_\lambda)j'_\lambda(h_\lambda)&=[\underline{a_1}\,\underline{c_\lambda^{(1)}}][\underline{a_2}\,\underline{c_\lambda^{(2)}}]=[\underline{a_1}][\underline{c_\lambda^{(1)}}\,\underline{a_2}][\underline{c_\lambda^{(2)}}]=[\underline{a_1}][\underline{a_4}\,\underline{c_\lambda^{(4)}}][\underline{c_\lambda^{(2)}}]=[\underline{a_1}\,\underline{a_4}][\underline{c_\lambda^{(4)}}\,\underline{c_\lambda^{(2)}}]\\&=[\underline{a_1}\,\underline{a_4}][\underline{a_4^{-1}a_1^{-1}a_3}\,\underline{c_\lambda^{(3)}}]=[\underline{a_1}][\underline{a_4}][\underline{a_4}]^{-1}[\underline{a_1}]^{-1}[\underline{a_3}\,\underline{c_\lambda^{(3)}}]=[\underline{a_3}\,\underline{c_\lambda^{(3)}}]=j'_\lambda(g_\lambda h_\lambda)\end{aligned}$$

となるので j'_λ は群準同型写像である．また，各 $\lambda,\mu\in\Lambda$ と $a\in A$ に対し $j'_\lambda(\iota_\lambda(a))=[\underline{a}]=j'_\mu(\iota_\mu(a))$ となるから $j'_\lambda\circ\iota_\lambda=j'_\mu\circ\iota_\mu$ が成り立つ．H を群，各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $f_\lambda\colon G_\lambda\to H$ を群準同型写像とし，さらに各 $\lambda,\mu\in\Lambda$ について $f_\lambda\circ\iota_\lambda=f_\mu\circ\iota_\mu$ が成り立つとする．そこで $\eta:=f_\lambda\circ\iota_\lambda$ とおく．写像 $f\colon M\to H$ を，各元 $[w]\in M$ $(w=\underline{a_1}\,\underline{c_{\lambda(1)}}\,\underline{a_2}\,\underline{c_{\lambda(2)}}\cdots\underline{a_n}\,\underline{c_{\lambda(n)}}\in\Sigma[A;G_\lambda]^*, a_i\in A, c_{\lambda(i)}\in C_{\lambda(i)}$, $a_i=1_A$ や $c_{\lambda(i)}=1_{G_\lambda}$ でもよいことに注意) に対し

$$f([w]):=\eta(a_1)f_{\lambda(1)}(c_{\lambda(1)})\eta(a_2)f_{\lambda(2)}(c_{\lambda(2)})\cdots\eta(a_n)f_{\lambda(n)}(c_{\lambda(n)}) \tag{4.2}$$

と定義する．ここで f が well-defined であるためには，$u\xRightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{}v$ ならば $f([u])=f([v])$ であることを言えば十分であるが，これは $\mathrm{S}[A;G_\lambda]$ の定義より

(1) $a_1,a_2\in A$ のとき，$f([\underline{a_1}\,\underline{a_2}])=\eta(a_1)\eta(a_2)=\eta(a_1a_2)=f([\underline{a_1a_2}])$,
(2) $c_\lambda\iota_\lambda(a)=\iota_\lambda(b)d_\lambda$ $(c_\lambda,d_\lambda\in C_\lambda, a,b\in A)$ のとき，$f([\underline{c_\lambda}\,\underline{a}])=f_\lambda(c_\lambda)\eta(a)=f_\lambda(c_\lambda)f_\lambda(\iota_\lambda(a))=f_\lambda(c_\lambda\iota_\lambda(a))=f_\lambda(\iota_\lambda(b)d_\lambda)=f_\lambda(\iota_\lambda(b))f_\lambda(d_\lambda)=\eta(b)f_\lambda(d_\lambda)=f([\underline{b}\,\underline{d_\lambda}])$,
(3) $c_\lambda d_\lambda=\iota_\lambda(a)e_\lambda$ $(c_\lambda,d_\lambda,e_\lambda\in C_\lambda, a\in A)$ のとき，$f([\underline{c_\lambda}\,\underline{d_\lambda}])=f_\lambda(c_\lambda d_\lambda)=f_\lambda(\iota_\lambda(a)e_\lambda)=f_\lambda(\iota_\lambda(a))f_\lambda(e_\lambda)=\eta(a)f_\lambda(e_\lambda)=f([\underline{a}\,\underline{e_\lambda}])$

であることからわかる．各 $\lambda\in\Lambda$ と任意の元 $\iota_\lambda(a)c_\lambda\in G_\lambda$ $(a\in A, c_\lambda\in C_\lambda)$ に対し

$$f\circ j'_\lambda(\iota_\lambda(a)c_\lambda)=f([\underline{a}\,\underline{c_\lambda}])=\eta(a)f_\lambda(c_\lambda)=f_\lambda(\iota_\lambda(a))f_\lambda(c_\lambda)=f_\lambda(\iota_\lambda(a)c_\lambda)$$

が成り立つので，可換図式

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "j'_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & H \end{tikzcd}$$

を得る．逆に，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対しこの図式が可換であるためには f を (4.2) のように定めるしかない．以上より同型 $G \cong M$ を得る． □

前節における被約語の定義を拡張しよう．w が抽象書き換え系 $\mathrm{S}[A; G_\lambda]$ に関して正規形 (定義 1.9) であるとき，w を**被約語** (reduced word) と呼ぶ．すなわち，被約語とは $\mathrm{IRR}(\mathrm{S}[A; G_\lambda])$ の元のことである．容易にわかるように，語 $w \in \Sigma[A; G_\lambda]^*$ が被約語であるためには $w = \underline{a}\underline{c_{\lambda(1)}}\underline{c_{\lambda(2)}}\cdots\underline{c_{\lambda(n)}}$ $(a \in A, n \geq 0, c_{\lambda(i)} \in C_{\lambda(i)} - \{1\}, \lambda(i) \neq \lambda(i+1))$ という形をしていることが必要十分である．命題??より $\Sigma[A; G_\lambda]^*$ の語を融合積の元とみなすことができ，逆に融合積のどの元も $\Sigma[A; G_\lambda]^*$ のある語によって表せる．

命題 4.37 の類似として次が証明できる．

命題 4.51． $\Sigma[A; G_\lambda]$ 上の文字列書き換え系 $\mathrm{S}[A; G_\lambda]$ は収束的，すなわち局所合流的かつ停止性を持つ．

証明．停止性から示す．関数 $l\colon \Sigma[A; G_\lambda]^* \to \mathbb{N}$ を次のように帰納的に定義する．

- $l(\varepsilon) := 0$,
- $w \in \Sigma[A; G_\lambda]^*, a \in A - \{1\}$ に対し $l(\underline{a}w) := l(w) + 1$.
- $w \in \Sigma[A; G_\lambda]^*, \lambda \in \Lambda, c_\lambda \in C_\lambda - \{1\}$ に対し $l(\underline{c_\lambda}w) := 2l(w) + 1$,

このとき任意の語 $u, v, w \in \Sigma[A; G_\lambda]^*$ に対し $l(w) \leq l(uwv)$ であり，また以下のようにして $u \xRightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{} v$ ならば $l(u) > l(v)$ が成り立つことがわかる．

(1) $a_1, a_2 \in A - \{1\}$ のとき，$l(\underline{a_1}\underline{a_2}) = 2 > 1 \geq l(\underline{a_1 a_2})$,
(2) $c_\lambda \iota_\lambda(a) = \iota_\lambda(b) d_\lambda$ $(c_\lambda \in C_\lambda - \{1\}, a \in A - \{1\}, d_\lambda \in C_\lambda, b \in A)$ のとき，$l(\underline{c_\lambda}\underline{a}) = 3 > 2 \geq l(\underline{b}\underline{d_\lambda})$,
(3) $c_\lambda d_\lambda = \iota_\lambda(a) e_\lambda$ $(c_\lambda, d_\lambda \in C_\lambda - \{1\}, a \in A, e_\lambda \in C_\lambda)$ のとき，$l(\underline{c_\lambda}\underline{d_\lambda}) = 3 > 2 \geq l(\underline{a}\underline{e_\lambda})$.

よって $\mathrm{S}[A; G_\lambda]$ は停止性を持つ．
次に，局所合流性を示す．語 $u, v_1, v_2 \in \Sigma[A; G_\lambda]^*$ について，$v_1 \xLeftarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{} u \xRightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{} v_2$ であるとする．書き換えられている部分が非自明に重なっている場合についてのみ証明する (他の場合は容易)．そのようなケースは以下のものしかない．

($u = u_1\underline{a_1}\underline{a_2}\underline{a_3}u_2$ のとき) $v_1 = u_1\underline{a_1 a_2}\underline{a_3}u_2, v_2 = u_1\underline{a_1}\underline{a_2 a_3}u_2$ とすると $v_1 \xRightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{\leq 1} u_1\underline{a_1 a_2 a_3}u_2 \xLeftarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{\leq 1} v_2$ となる ($a_1 a_2 = 1_A$ や $a_2 a_3 = 1_A$ かもしれないことに注意)．
($u = u_1\underline{c_\lambda}\underline{a_1}\underline{a_2}u_2$ のとき) $c_\lambda \iota_\lambda(a_1) = \iota_\lambda(a_3)c_\lambda^{(3)}, c_\lambda^{(3)}\iota_\lambda(a_2) = \iota_\lambda(a_4)c_\lambda^{(4)}, c_\lambda\iota_\lambda(a_1 a_2) = \iota_\lambda(a_5)c_\lambda^{(5)}$ とすると $\iota_\lambda(a_3 a_4)c_\lambda^{(4)} = \iota_\lambda(a_5)c_\lambda^{(5)}$ である．よって $v_1 = u_1\underline{a_3}\underline{c_\lambda^{(3)}}\underline{a_2}u_2, v_2 = u_1\underline{c_\lambda}\underline{a_1 a_2}u_2$ とすると $v_1 \xRightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{\leq 1} u_1\underline{a_3}\underline{a_4}\underline{c_\lambda^{(4)}}u_2 \xRightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{\leq 1} u_1\underline{a_3 a_4}\underline{c_\lambda^{(4)}}u_2 = u_1\underline{a_5}\underline{c_\lambda^{(5)}}u_2 \xLeftarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{\leq 1} v_2$ となる．これを図で表せば

$$\begin{tikzcd} & \underline{a_3}\underline{c_\lambda^{(3)}}\underline{a_2} \arrow[r] & \underline{a_3}\underline{a_4}\underline{c_\lambda^{(4)}} \arrow[r] & \underline{a_3 a_4}\underline{c_\lambda^{(4)}} \arrow[d, equal] \\ \underline{c_\lambda}\underline{a_1}\underline{a_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & \underline{c_\lambda}\underline{a_1 a_2} \arrow[rr] & & \underline{a_5}\underline{c_\lambda^{(5)}} \end{tikzcd}$$

となる．

($u=u_1\underline{c_\lambda^{(1)}}\,\underline{c_\lambda^{(2)}}\,\underline{a}u_2$ **のとき**) 同様に，次の図のようにすればよい．

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{a_3}\,\underline{c_\lambda^{(3)}}\,\underline{a} \arrow[r] & \underline{a_3}\,\underline{a_4}\,\underline{c_\lambda^{(4)}} \arrow[rr] & & \underline{a_3a_4}\,\underline{c_\lambda^{(4)}} \arrow[d, equal] \\
\underline{c_\lambda^{(1)}}\,\underline{c_\lambda^{(2)}}\,\underline{a} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \underline{c_\lambda^{(1)}}\,\underline{a_5}\,\underline{c_\lambda^{(5)}} \arrow[r] & \underline{a_6}\,\underline{c_\lambda^{(6)}}\,\underline{c_\lambda^{(5)}} \arrow[r] & \underline{a_6}\,\underline{a_7}\,\underline{c_\lambda^{(7)}} \arrow[r] & \underline{a_6a_7}\,\underline{c_\lambda^{(7)}}.
\end{tikzcd}$$

($u=u_1\underline{c_\lambda^{(1)}}\,\underline{c_\lambda^{(2)}}\,\underline{c_\lambda^{(3)}}u_2$ **のとき**) 同様に，次の図のようにすればよい．

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{a_4}\,\underline{c_\lambda^{(4)}}\,\underline{c_\lambda^{(3)}} \arrow[r] & \underline{a_4}\,\underline{a_5}\,\underline{c_\lambda^{(5)}} \arrow[rr] & & \underline{a_4a_5}\,\underline{c_\lambda^{(5)}} \arrow[d, equal] \\
\underline{c_\lambda^{(1)}}\,\underline{c_\lambda^{(2)}}\,\underline{c_\lambda^{(3)}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \underline{c_\lambda^{(1)}}\,\underline{a_6}\,\underline{c_\lambda^{(6)}} \arrow[r] & \underline{a_7}\,\underline{c_\lambda^{(7)}}\,\underline{c_\lambda^{(6)}} \arrow[r] & \underline{a_7}\,\underline{a_8}\,\underline{c_\lambda^{(8)}} \arrow[r] & \underline{a_7a_8}\,\underline{c_\lambda^{(8)}}.
\end{tikzcd}$$

以上より局所合流性が成り立つ． □

命題 4.51 と定理 1.10 より，$\Sigma[A;G_\lambda]^*$ のどの語に対しても，それと同値な被約語がただ一つ存在することがわかる．

系 4.52.　群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と群 A からの**単射**群準同型写像の族 $(\iota_\lambda\colon A\hookrightarrow G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，群準同型写像 $j_\lambda\colon G_\lambda\to \mathop{\text{\Large$\ast$}}_A G_\lambda$ も単射となる．

証明. 命題??の証明中の $j'_\lambda\colon G_\lambda\to\Sigma[A;G_\lambda]^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{*}$ が単射であることを言えばよい．任意に元 $g_\lambda\in\mathrm{Ker}(j'_\lambda)$ をとると，$g_\lambda=\iota_\lambda(a)c_\lambda$ $(a\in A, c_\lambda\in C_\lambda)$ と一意的に表せる．よって $[\underline{a}\,\underline{c_\lambda}]=j'_\lambda(\iota_\lambda(a)c_\lambda)=[\varepsilon]$，つまり $\underline{a}\,\underline{c_\lambda}\xLeftrightarrow[\mathrm{S}[A;G_\lambda]]{*}\varepsilon$ をみたす．ここで $\underline{a}\,\underline{c_\lambda}$ と ε はどちらも被約語だから，命題 4.51 より $a=1_A, c_\lambda=1_{G_\lambda}$ でなければならず，よって j'_λ は単射である． □

系 4.53.　群の族 $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と群 A からの**単射**群準同型写像の族 $(\iota_\lambda\colon A\hookrightarrow G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をとると，系 4.52 より融合積への群準同型写像 $j_\lambda\colon G_\lambda\to\mathop{\text{\Large$\ast$}}_A G_\lambda$ は単射である．よって合成写像 $\iota:=j_\lambda\circ\iota_\lambda$ も単射である (どの $\lambda,\mu\in\Lambda$ に対しても $j_\lambda\circ\iota_\lambda=j_\mu\circ\iota_\mu$ であることに注意)．このとき融合積 $\mathop{\text{\Large$\ast$}}_A G_\lambda$ において

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda(G_\lambda)=\iota(A)$$

が成り立つ．言い換えると，A, G_λ を融合積 $\mathop{\text{\Large$\ast$}}_A G_\lambda$ の部分群とみなしたとき，

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = A$$

が成り立つ．

証明. 被約語 $w=\underline{a}\,\underline{c_{\lambda(1)}}\,\underline{c_{\lambda(2)}}\cdots\underline{c_{\lambda(n)}}\in\Sigma[A;G_\lambda]^*$ に対し，$[w]\in\iota(A)\iff n=0$ が成り立つことからわかる． □

注意 4.54.　命題??，系 4.52，系 4.53 は群 A からの群準同型写像の族 $(\iota_\lambda\colon A\to G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の中に一つでも単射でないものがあると成り立たない．実際，**一つの** ι_λ のみが単射でないだけにも関わらず，**すべての** j_λ が単射でなくなってしまう例が存在する (特に，群の圏において「押し出しはモノ射を保つ」という主張は成り立たない)．具体的に

は，図式 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \twoheadleftarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ (単射は何でもよい) の融合積は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}) \cong \{1\}$ となることが知られている (詳細は [Ser80, Chapter I, §1.1, Exercise 1, 2] を見よ．ただし，英語版 [Ser80] の Exercise 1 は誤訳を含むため注意されたい．$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ が単純群であることの証明は例えば [Lan05, Chapter VI, Theorem 3.8] などを見よ)．

4.7　例: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

本節では 2 つの群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$ と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ がともに実質的自由群であり，さらにそれぞれ融合積と自由積として書けることを見る．これらの群は実質的自由群について考える上で重要な具体例を提供する．

4.7.1　一次分数変換による射影直線への作用

まず，2×2 行列を考える上で便利な一次分数変換に関する用語を導入しておく．本小節の記述はいくぶん抽象的であるが，以下では $K = \mathbb{R}, R = \mathbb{Z}$ だと思って差し支えない．

定義 4.55 (射影直線).　K を体とする．$K^2 - \{(0,0)\}$ 上の同値関係 $\sim$ を，$(x, y), (x', y') \in K^2 - \{(0,0)\}$ に対し

$$(x, y) \sim (x', y') \;:\Longleftrightarrow\; \exists \lambda \in K^\times \; [x' = \lambda x \wedge y' = \lambda y]$$

と定義する (ここで $K^\times := K - \{0\}$ である．$\sim$ が実際に同値関係になっていることは容易にわかる)．K 上の**射影直線** (projective line) とは，商集合

$$\mathbb{P}^1(K) := (K^2 - \{(0,0)\})/{\sim}$$

のことをいう．元 $(x, y) \in K^2 - \{(0,0)\}$ が代表する同値類を記号 $[x : y] \in \mathbb{P}^1(K)$ で表す．記号 ∞ を $\infty \notin K$ なるものとし，写像 $f\colon \mathbb{P}^1(K) \to K \cup \{\infty\}$ を $[x : y] \in \mathbb{P}^1(K)$ に対し

$$f([x : y]) := \begin{cases} x/y & (y \neq 0 \text{ のとき}), \\ \infty & (y = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義すると，f は well-defined な全単射である．f を通した同一視により，しばしば $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ とみなす．

射影直線 $\mathbb{P}^1(K)$ 内の各同値類 $[x : y] \in \mathbb{P}^1(K)$ は「平面内の原点 $(0, 0)$ を通る直線 (から原点を除いたもの)」であり，像 $f([x : y]) = x/y$ はこの直線の「傾きの逆数」に対応する．幾何学的には，写像 f は「直線 $[x : y]$ を直線 $y = 1$ との唯一の交点にうつす (存在しなければ ∞ にうつす)」写像とみなせる．

体 K の部分環 $R \subseteq K$ に対し，射影直線 $\mathbb{P}^1(K)$ には次のようにして特殊線形群 $\mathrm{SL}_2(R)$ による作用が定まる．

定義 4.56 (一次分数変換).　K を体，$R \subseteq K$ をその部分環とする．群 $\mathrm{SL}_2(R)$ の射影直線 $\mathbb{P}^1(K)$ への作用 $\Phi\colon \mathrm{SL}_2(R) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(K))$ を，$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(R)$ と $[x : y] \in \mathbb{P}^1(K)$ に対し

$$\Phi(A)([x : y]) := \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_\sim = [ax + by : cx + dy]$$

と定義する．Φ が well-defined な群準同型写像であることは容易にわかる．同型写像 $\Phi(A) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(K))$ のことを**一次分数変換** (linear fractional transformation) と呼ぶ．

この作用 Φ が一次分数変換と呼ばれる理由は，定義 4.55 の全単射 f により $\Phi\colon \mathrm{SL}_2(R) \to \mathrm{Aut}(K \cup \{\infty\})$ とみな

すと，

$$\Phi(A)(z)=\begin{cases}\dfrac{az+b}{cz+d} & (z\neq\infty, cz+d\neq 0\text{ のとき}),\\ \infty & (z\neq\infty, cz+d=0\text{ のとき}),\\ a/c & (z=\infty, c\neq 0\text{ のとき}),\\ \infty & (z=\infty, c=0\text{ のとき})\end{cases}$$

が成り立つからである．

補題 4.57. 一次分数変換による作用 $\Phi\colon \mathrm{SL}_2(R)\to\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(K))$ について，$\mathrm{Ker}(\Phi)=\{\pm I\}$ が成り立つ (ここで $I\in\mathrm{SL}_2(R)$ は 2 次の単位行列).

証明. ($\subseteq$) $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{Ker}(\Phi)$ をとると，

- $[0:1]=\Phi(A)([0:1])=[b:d]$ より $b=0$,
- $[1:0]=\Phi(A)([1:0])=[a:c]$ より $c=0$,
- $[1:1]=\Phi(A)([1:1])=[a+b:c+d]=[a:d]$ より $a=d$

であり，$A\in\mathrm{SL}_2(R)$ より $1=\det(A)=a^2$ だから $a=\pm1$，よって $A=\pm I$ を得る．

($\supseteq$) 明らか． □

系 4.58. Φ は忠実な作用 $\bar{\Phi}\colon \mathrm{PSL}_2(R)\to\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(K))$ を誘導する．

証明. 準同型定理より像との同型 $\bar{\Phi}\colon \mathrm{PSL}_2(R)\,(=\mathrm{SL}_2(R)/\mathrm{Ker}(\Phi))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}(\Phi)\subseteq\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(K))$ がある． □

以降，行列 $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(R)$ の定める同値類 $\{\pm A\}\in\mathrm{PSL}_2(R)$ を $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ と書くことにする．

4.7.2 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成系と Sanov 部分群

まず，群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が 2 つの行列で生成されることを見る．

定理 4.59. 2 つの行列 S,T を

$$S:=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\qquad T:=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

とおくと，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})=\langle S,T\rangle$ が成り立つ．さらにより強く，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ はモノイドとして S,T により生成される．

証明 ([黒栗斎 05, 定理 9.18]). 計算により $S^2=(ST)^3=-I$ がわかるから $S^{-1}=S^3, T^{-1}=S^2\cdot STSTS$ となり，S,T が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を群として生成するならばモノイドとして生成することはよい．行列 $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を任意にとる．必要なら A を $AS^2=-A$ で置き換えることにより，$c\geq 0$ であると仮定してよい．c に関する帰納法で証明する．

($c=0$ のとき) このとき $ad=\det(A)=1$ で，$a,d\in\mathbb{Z}$ だから $(a,d)=(1,1)$ または $(a,d)=(-1,-1)$ である．いずれにせよ

$$\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=T^b\in\langle S,T\rangle,\qquad \begin{pmatrix}-1&b\\0&-1\end{pmatrix}=-T^{-b}=S^2T^{-b}\in\langle S,T\rangle$$

となる．

($c\geq 1$ のとき) d を c で割り算すると $d=cq+r$ $(q,r\in\mathbb{Z}, 0\leq r<c)$ と一意的に表せる．帰納法の仮定より

$\left(\begin{smallmatrix} b-aq & -a \\ r & -c \end{smallmatrix}\right) \in \langle S, T\rangle$ だから

$$\begin{aligned} A &= A(T^{-q}(SS^3)T^q) = A(T^{-q}S)(S^3T^q) = A\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^3T^q \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & cq+r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -q & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^3T^q = \begin{pmatrix} b-aq & -a \\ r & -c \end{pmatrix} S^3T^q \in \langle S, T\rangle \end{aligned}$$

となる. □

例 4.60. $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 11 \\ -7 & -38 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ について，定理 4.59 に従って計算すると

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -7 & -38 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & -11 \\ 7 & 38 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & -11 \\ 7 & 38 \end{pmatrix}(T^{-5}SS^3T^5) && (38 = 7\cdot 5 + 3 \text{ より}) \\ &= -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} S^3T^5 = -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}(T^3SS^3T^{-3})S^3T^5 && (-7 = 3\cdot(-3) + 2 \text{ より}) \\ &= -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} S^3T^{-3}S^3T^5 = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}(T^2SS^3T^{-2})S^3T^{-3}S^3T^5 && (-3 = 2\cdot(-2) + 1 \text{ より}) \\ &= -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} S^3T^{-2}S^3T^{-3}S^3T^5 \\ &= -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}(T^2SS^3T^{-2})S^3T^{-2}S^3T^{-3}S^3T^5 && (-2 = 1\cdot(-2) + 0 \text{ より}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^3T^{-2}S^3T^{-2}S^3T^{-3}S^3T^5 = T^{-1}S^3T^{-2}S^3T^{-2}S^3T^{-3}S^3T^5 \\ &= T^{-1}ST^{-2}ST^{-2}ST^{-3}ST^5 && (S^2 = -I \text{ より}) \end{aligned}$$

となる.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$) の有限指数自由部分群の例の一つとして，ここでは次の Sanov 部分群を挙げる．本小節の残りと次小節にかけて，Sanov 部分群が実際に有限指数の自由部分群になっていることを証明する．

定義 4.61 (Sanov 部分群 [San47]). $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の **Sanov 部分群** (Sanov subgroup) を

$$\left\langle A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

と定義する.

簡単な計算により，すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対し $A^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), B^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つことがわかる.

補題 4.62. $G := \langle A, B\rangle$ を Sanov 部分群とし，

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 4j+1 & 2k \\ 2l & 4m+1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, j, k, l, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおくと $G = H$ が成り立つ.

証明 ([Löh17, Proposition 4.4.2.2]). ($\subseteq$) 生成される部分群の定義より，G の任意の元は $M = s_1^{e_1}s_2^{e_2}\cdots s_n^{e_n} \in G$ ($s_i \in \{A, B\}, e_i \in \{\pm 1\}$) という形で書ける．$M \in H$ であることを，長さ n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは $M = I \in H$ なのでよい．長さ $n \geq 1$ のときは，計算により

$$\begin{pmatrix} 4j+1 & 2k \\ 2l & 4m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \pm 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4j+1 & 2(k \pm 4j \pm 1) \\ 2l & 4(m \pm l) + 1 \end{pmatrix} \in H,$$

$$\begin{pmatrix} 4j+1 & 2k \\ 2l & 4m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(j\pm k)+1 & 2k \\ 2(l\pm 4m\pm 1) & 4m+1 \end{pmatrix} \in H$$

となるのでよい．

($\supseteq$) 任意に元 $M = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4j+1 & 2k \\ 2l & 4m+1 \end{pmatrix} \in H$ をとる．$M \in G$ であることを，$\min\{|x_{11}|, |x_{12}|\}$ に関する帰納法で示す．$x_{11} = 4j+1$ は常に奇数，$x_{12} = 2k$ は常に偶数であり，よって $x_{11} \neq x_{12}$ であることに注意する．

($\min\{|x_{11}|, |x_{12}|\} = 0$ のとき) このとき $k = 0$ でなければならないので $(4j+1)(4m+1) = \det(M) = 1$ より $j = m = 0$，よって

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2l & 1 \end{pmatrix} = B^l \in G$$

を得る．

($\min\{|x_{11}|, |x_{12}|\} = |x_{11}| \geq 1$ のとき) このとき $1 \leq |x_{11}| < |x_{12}|$ である．$x_{12} + |x_{11}|$ を $2x_{11}$ $(\neq 0)$ で割り算すると $x_{12} + |x_{11}| = 2qx_{11} + r$ $(q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 2|x_{11}|)$ と一意的に書ける．よって

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} := MA^{-q} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} - 2qx_{11} \\ x_{21} & x_{22} - 2qx_{21} \end{pmatrix}$$

とおくと $|y_{12}| = |x_{12} - 2qx_{11}| = |-|x_{11}| + 2qx_{11} + r - 2qx_{11}| = |r - |x_{11}|| \leq |x_{11}| = |y_{11}|$ が成り立つ．また ($\subseteq$) の証明から $MA^{-q} \in H$ なので，特に y_{12} と y_{11} の偶奇は異なるから $|y_{12}| < |y_{11}|$ が成り立つ．よって $\min\{|y_{11}|, |y_{12}|\} = |y_{12}| < |y_{11}| = |x_{11}| = \min\{|x_{11}|, |x_{12}|\}$ だから帰納法の仮定より $MA^{-q} \in G$ となり，$M = (MA^{-q})A^q \in G$ を得る．

($\min\{|x_{11}|, |x_{12}|\} = |x_{12}| \geq 1$ のとき) このとき $|x_{11}| > |x_{12}| \geq 1$ である．$x_{11} + |x_{12}|$ を $2x_{12}$ $(\neq 0)$ で割り算すると $x_{11} + |x_{12}| = 2qx_{12} + r$ $(q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 2|x_{12}|)$ と一意的に書ける．よって

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} := MB^{-q} = \begin{pmatrix} x_{11} - 2qx_{12} & x_{12} \\ x_{21} - 2qx_{22} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと $|y_{11}| = |x_{11} - 2qx_{12}| = |-|x_{12}| + 2qx_{12} + r - 2qx_{12}| = |r - |x_{12}|| \leq |x_{12}| = |y_{12}|$ が成り立つ．また ($\subseteq$) の証明から $MB^{-q} \in H$ なので，特に y_{11} と y_{12} の偶奇は異なるから $|y_{11}| < |y_{12}|$ が成り立つ．よって $\min\{|y_{11}|, |y_{12}|\} = |y_{11}| < |y_{12}| = |x_{12}| = \min\{|x_{11}|, |x_{12}|\}$ だから帰納法の仮定より $MB^{-q} \in G$ となり，$M = (MB^{-q})B^q \in G$ を得る． □

例 4.63. $M = \left(\begin{smallmatrix} -11 & -46 \\ 28 & 117 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ について，補題 4.62 に従って計算すると

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} -11 & -46 \\ 28 & 117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -46 \\ 28 & 117 \end{pmatrix} A^{-2}A^2 && (-46+11 = 2\cdot(2\cdot(-11))+9 \text{ より}) \\
&= \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 28 & 5 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 28 & 5 \end{pmatrix} (B^{-3}B^3)A^2 && (-11+2 = 3\cdot(2\cdot(-2))+3 \text{ より}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} B^3A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} (AA^{-1})B^3A^2 && (-2+1 = (-1)\cdot(2\cdot 1)+1 \text{ より}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}B^3A^2 = B^{-1}A^{-1}B^3A^2
\end{aligned}$$

となる．

系 4.64. Sanov 部分群は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の指数 12 の部分群である．

証明 ([Löh17, Proposition 4.4.2.1]). 2 元体 $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対し，レベル 2 の**合同部分群** (congruence subgroup) $\Gamma(2) \lhd \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を，行列の成分の mod 2 をとる写像の核 $\Gamma(2) := \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2))$ と定義すると，明らかに $A, B \in \Gamma(2)$ だから $G := \langle A, B\rangle \leq \Gamma(2)$ である．ここで $\mathbb{F}_2$ においては $-1 = 1$ であることに注意すると

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

がわかるので $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(2)) = 6$ である[9]．よって $(\Gamma(2) : G) = 2$ を示せばよい．定義より $\Gamma(2)$ の対角成分は 4 を法として 1 または 3 に合同なので

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 4j + r_1 & 2k \\ 2l & 4m + r_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; j, k, l, m \in \mathbb{Z}, r_1, r_2 \in \{1, 3\} \right\}$$

であるが，行列式を計算すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4j + 3 & 2k \\ 2l & 4m + 1 \end{vmatrix} &= (4j + 3)(4m + 1) - 4kl \equiv 3 \neq 1 \pmod 4, \\ \begin{vmatrix} 4j + 1 & 2k \\ 2l & 4m + 3 \end{vmatrix} &= (4j + 1)(4m + 3) - 4kl \equiv 3 \neq 1 \pmod 4 \end{aligned}$$

となるので実際には $(r_1, r_2) = (1, 1)$ または $(r_1, r_2) = (3, 3)$ の場合しかない．よって補題 4.62 より

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} 4j + 1 & 2k \\ 2l & 4m + 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; j, k, l, m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 4j + 3 & 2k \\ 2l & 4m + 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; j, k, l, m \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= G \cup (-I)G \end{aligned}$$

となるので $\{\pm I\}$ は $\Gamma(2)/G$ の完全代表系であり，$(\Gamma(2) : G) = 2$ を得る． □

系 4.65. 商写像 $\pi \colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の Sanov 部分群 $G := \langle A, B\rangle$ への制限 $\pi{\restriction}G \colon G \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は単射である．さらに，像 $\pi(G) \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の指数 6 の部分群であり，$\pi(G) = \pi(\Gamma(2))$ が成り立つ．

証明． 制限写像 $\pi{\restriction}G$ が単射であることを示すには $\mathrm{Ker}(\pi{\restriction}G) = \{I\}$ を示せばよいが，$\mathrm{Ker}(\pi{\restriction}G) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi) = \{\pm I\}$ であることより $-I \notin G$ を示せば十分である．これは補題 4.62 と $-I \equiv \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) \pmod 4$ より明らかである．また，系 4.64 の証明より $\Gamma(2) = \{\pm I\}G$ だから $\pi(\Gamma(2)) = \pi(\{\pm I\}G) = \pi(G)$ であり，さらに第三同型定理から

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\pi(G) \cong (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\})/(\{\pm I\}G/\{\pm I\}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$$

となるので $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) : \pi(G)) = 6$ を得る． □

4.7.3 ピンポン補題と Sanov 部分群の自由性

ピンポン補題 (ping-pong lemma) (または**卓球補題** (table-tennis lemma)) とは，ある群が自由積で書けるための十分条件を与える定理である．ここでは，2 つの巡回部分群の場合に限ってピンポン補題を証明する．

定理 4.66 (ピンポン補題 (ping-pong lemma)). G を群，$a, b \in G$ とし，$G = \langle a, b\rangle$ であるとする．また，a, b の位数はそれぞれ $\mathrm{ord}(a) \geq 2, \mathrm{ord}(b) \geq 3$ をみたすとする．G は集合 X に作用しているとし，空でないある部分集合 $X_a, X_b \subseteq X$ が以下の条件をみたすとする．

[9] より強く，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ の元は 3 つのベクトル $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_2^2$ の置換を引き起こすので $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$ も言える．

(1) $X_b \not\subseteq X_a$,
(2) $n \in \mathbb{Z}, a^n \neq 1_G$ ならば $a^n \cdot X_b \subseteq X_a$,
(3) $n \in \mathbb{Z}, b^n \neq 1_G$ ならば $b^n \cdot X_a \subseteq X_b$.

このとき，同型 $G \cong \langle a\rangle_G * \langle b\rangle_G$ が成り立つ．よって特に，$\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = \infty$ ならば $G \cong \mathrm{F}(a, b)$ が成り立つ．

通常は $X_a \cap X_b = \emptyset$ の場合を考えることが多い．

証明 (cf. [Löh17, Theorem 4.3.1]). 自由積の普遍性 (命題 4.32) より，自然な群準同型写像 $\varphi\colon \langle a\rangle_G * \langle b\rangle_G \to G$ がとれる．仮定 $G = \langle a, b\rangle$ より φ は全射である．よって φ が単射であることを示せば証明が終わる．G の X への作用を $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ とすると，合成による作用 $\alpha \circ \varphi\colon \langle a\rangle_G * \langle b\rangle_G \to \mathrm{Aut}(X)$ ができる．φ が単射であることを言うには，合成 $\alpha \circ \varphi$ が単射 (すなわち忠実な作用) であることを示せば十分である．命題 4.36 より $\langle a\rangle_G * \langle b\rangle_G \cong \Sigma[\langle a\rangle, \langle b\rangle]^* / \overset{*}{\underset{\mathrm{S}[\langle a\rangle, \langle b\rangle]}{\Longleftrightarrow}}$ であるので，命題 4.37 より空文字列でない被約語 $w \in \Sigma[\langle a\rangle, \langle b\rangle]^* - \{\varepsilon\}$ について $\alpha \circ \varphi(w) \neq \mathrm{id}_X$ が成り立つことを言えば十分である．

(w が a の冪で始まり a の冪で終わるとき) このとき $w = a^{m(0)} b^{n(1)} a^{m(1)} b^{n(2)} \cdots a^{m(k-1)} b^{n(k)} a^{m(k)}$ $(k \geq 0, m(i), n(i) \in \mathbb{Z}, a^{m(i)} \neq 1_G \neq b^{n(i)})$ と書けるので，帰納的に

$$\begin{aligned}
\alpha \circ \varphi(w)(X_b) &= \alpha \circ \varphi(a^{m(0)} b^{n(1)} \cdots a^{m(k-1)} b^{n(k)} a^{m(k)})(X_b) \\
&\subseteq \alpha \circ \varphi(a^{m(0)} b^{n(1)} \cdots a^{m(k-1)} b^{n(k)})(X_a) \\
&\subseteq \alpha \circ \varphi(a^{m(0)} b^{n(1)} \cdots a^{m(k-1)})(X_b) \\
&\cdots \\
&\subseteq \alpha \circ \varphi(a^{m(0)} b^{n(1)})(X_a) \\
&\subseteq \alpha \circ \varphi(a^{m(0)})(X_b) \\
&\subseteq X_a
\end{aligned}$$

がわかる．よって仮定 $X_b \not\subseteq X_a$ と合わせて $\alpha \circ \varphi(w) \neq \mathrm{id}_X$ を得る．

(w が b の冪で始まり b の冪で終わるとき) このとき共役 awa^{-1} も被約語であるので，$\alpha \circ \varphi(awa^{-1}) = \mathrm{id}_X \iff \alpha \circ \varphi(w) = \mathrm{id}_X$ であることに注意すれば，上の場合より $\alpha \circ \varphi(awa^{-1}) \neq \mathrm{id}_X$ だから $\alpha \circ \varphi(w) \neq \mathrm{id}_X$ を得る．

(w が a の冪で始まり b の冪で終わるとき) このとき $w = a^{m(1)} b^{n(1)} a^{m(2)} b^{n(2)} \cdots a^{m(k)} b^{n(k)}$ $(k \geq 1, m(i), n(i) \in \mathbb{Z}, a^{m(i)} \neq 1_G \neq b^{n(i)})$ と書ける．$\mathrm{ord}(b) \geq 3$ であることより $b^{n(k)-1} \neq 1_G$ または $b^{n(k)+1} \neq 1_G$ の少なくとも一方が成り立つ．前者の場合は共役 bwb^{-1} が，後者の場合は共役 $b^{-1}wb$ が b の冪で始まり b の冪で終わるような被約語になっている．いずれにせよ上の場合と同様にして $\alpha \circ \varphi(w) \neq \mathrm{id}_X$ を得る．

(w が b の冪で始まり a の冪で終わるとき) このとき逆元 w^{-1} は a の冪で始まり b の冪で終わる被約語で書けるので，$(\alpha \circ \varphi(w))^{-1} = \alpha \circ \varphi(w^{-1}) \neq \mathrm{id}_X$ より $\alpha \circ \varphi(w) \neq \mathrm{id}_X$ を得る． □

系 4.67. Sanov 部分群 $G := \langle A, B\rangle \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は階数 2 の自由群であり，同型 $G \cong \mathrm{F}(A, B)$ が成り立つ．

証明. G の Euclid 平面 $X := \mathbb{R}^2$ への作用 $G \curvearrowright X$ を，行列 $M \in G$ とベクトル $v \in X$ の通常の積によって $M \cdot v := Mv$ と定める．ここで

$$X_A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \;\middle|\; |x| > |y| \right\},$$

$$X_B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \;\middle|\; |x| < |y| \right\}$$

とおくと，明らかに $X_A \cap X_B = \emptyset$ である．また，どの整数 $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ と $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X_B$ についても

$$A^n v = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2ny \\ y \end{pmatrix}$$

であり，このとき

$$\begin{aligned} |x + 2ny| &\geq |2ny| - |x| && (\text{三角不等式}) \\ &= 2|n| \cdot |y| - |x| \\ &> 2|n| \cdot |y| - |y| && (v \in X_B \text{ より}) \\ &= (2|n| - 1)|y| \\ &\geq |y| && (n \neq 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

だから $A^n \cdot v \in X_A$ を得る．よって $A^n \cdot X_B \subseteq X_A$ となり，同様にして $B^n \cdot X_A \subseteq X_B$ であることもわかるので，ピンポン補題 4.66 より $G \cong \mathrm{F}(A, B)$ を得る．□

系 4.68.　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は実質的自由群である．

証明．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ については系 4.64 と系 4.67 より．さらに系 4.65 より $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の場合が言える．□

4.7.4　$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が自由積と融合積で書けること

ここでは $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ がそれぞれ自由積，融合積で書けることを見る．このことは 10 章で Bass–Serre 理論を扱う際に再び証明する．

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ については，ピンポン補題を使って比較的容易に証明することができる．

定理 4.69.　群の同型 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が成り立つ．

証明 ([Alp93])．$R := ST = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とおき，S, R の同値類をそれぞれ $s := \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], r := \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ とおく．計算により $s^2 = r^3 = I \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ がわかる．定理 4.59 より $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s, r \rangle$ が成り立つ．射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ への一次分数変換による作用 $\bar{\Phi}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ を考えると，

$$\bar{\Phi}(s)(z) = -\frac{1}{z}, \qquad \bar{\Phi}(r)(z) = \frac{-1}{z+1}, \qquad \bar{\Phi}(r^2)(z) = -1 - \frac{1}{z}$$

となる．ここで $P, N \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ をそれぞれ正の無理数全体の集合，負の無理数全体の集合とすると，

$$\bar{\Phi}(s)(N) \subseteq P, \qquad \bar{\Phi}(r)(P) \subseteq N, \qquad \bar{\Phi}(r^2)(P) \subseteq N$$

が成り立つことが確かめられる (無理数の一次分数変換による像もまた無理数であり，特に ∞ になりえないことに注意する)．よってピンポン補題 4.66 より同型 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s, r \rangle \cong \langle s \rangle * \langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を得る．□

定理 4.69 から $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ が実質的自由群であることの別証明が得られる．

例 4.70.　定理 4.69 と定理 4.44 より，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は指数 6，階数 2 の自由部分群

$$\langle [s, r], [s, r^2] \rangle = \langle srsr^2, sr^2sr \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を持つ．

さらに，定理 4.69 を用いると $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ も融合積を用いて書けることが示せる．

定理 4.71. 群の同型 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \langle\, S, R \mid S^4, R^6, S^2R^3 \,\rangle$ が成り立つ．

証明． まず，単射群準同型 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \overset{\iota_4}{\hookleftarrow} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\iota_6}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は一意に定まるので主張に曖昧さはないことに注意する．まず，2 つ目の同型から示す．

主張 4.72. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \langle\, S, R \mid S^4, R^6, S^2R^3 \,\rangle = \mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle$.

証明． 例 4.14.(2) より $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle\, S \mid S^4 \,\rangle, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \langle\, R \mid R^6 \,\rangle$ であり，自由積の定義 4.31 と群の表示の定義 4.23 から $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \langle\, S, R \mid S^4, R^6 \,\rangle = \mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle$ である．よって融合積の定義 4.47 より，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} &\cong \langle\, S, R \mid S^4, R^6 \,\rangle / \langle\!\langle i_4(\iota_4(0))^{-1} i_6(\iota_6(0)), i_4(\iota_4(1))^{-1} i_6(\iota_6(1)) \rangle\!\rangle_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \\
&= \langle\, S, R \mid S^4, R^6 \,\rangle / \langle\!\langle i_4(\iota_4(1))^{-1} i_6(\iota_6(1)) \rangle\!\rangle_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \\
&= \frac{\mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}{\langle\!\langle i_4(\iota_4(1))^{-1} i_6(\iota_6(1)) \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4,R^6\rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}} \\
&= \frac{\mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}{\langle\!\langle (S^2\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)})^{-1} \cdot R^3 \langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)} \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4,R^6\rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}} \\
&= \frac{\mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}{\langle\!\langle S^2R^3\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)} \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4,R^6\rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}}
\end{aligned}
$$

自然な群準同型写像 $\langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)} \to \mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}$ に準同型定理を用いて

$$
= \frac{\mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}{\langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}/\langle\!\langle S^4, R^6 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}}
$$

第 3 同型定理より

$$
\cong \mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}
$$

を得る． □

商写像を $\pi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$，全射群準同型写像 $\varphi\colon \mathrm{F}(S,R) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を $\varphi(S) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \varphi(R) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と定義し (全射性は定理 4.59 より)，$\psi\colon \mathrm{F}(S,R) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ を $\psi := \pi \circ \varphi$ とおく．主張 4.72 より，$\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}$ を示せば証明が終わる．行列を具体的に計算すれば $\langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ は明らか．逆向きの包含を示す．任意に元 $[w] \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ $(X := \{S, R\}, w \in \Sigma_X^*)$ をとる．定理 4.69 より $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle\, S, R \mid S^2, R^3 \,\rangle = \mathrm{F}(S,R)/\langle\!\langle S^2, R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}$ だから $[w] \in \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi) = \langle\!\langle S^2, R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}$ を得る．よって補題 4.25 の (3) $\Longrightarrow$ (2) より，$\tilde{R}_0 := \{S^2, R^3\}$ とおけばある語 $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma_X^*$ と $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n \in \tilde{R}_0 \cup \bar{\tilde{R}}_0 = \{S^2, R^3, \bar{S}^2, \bar{R}^3\}$ について

$$
w \underset{\mathrm{C}[X]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}} (w_1\tilde{r}_1\bar{w}_1)(w_2\tilde{r}_2\bar{w}_2)\cdots(w_n\tilde{r}_n\bar{w}_n) \tag{4.3}
$$

が成り立つ．$\tilde{R}_1 := \{S^4, R^6, S^2R^3\}$ とおく．ここで $w \underset{\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]}{\overset{*}{\Longleftrightarrow}} \varepsilon$ であることが示せれば，再び補題 4.25 の (1) $\Longrightarrow$ (3) を用いて $[w] \in \langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)}$ が得られる．そのために次の主張を示す．

主張 4.73. 任意の語 $w \in \Sigma_X^*$ と $\tilde{r} \in \{S^2, R^3, \bar{S}^2, \bar{R}^3\}$ に対し，$w\tilde{r}\bar{w} \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} S^2$ が成り立つ．

証明．長さ $|w|$ に関する帰納法で証明する．$\mathrm{C}[X]$ と $\mathrm{E}[\tilde{R}_1]$ の定義より

- $\bar{S}^2 \xLeftarrow[\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{} \bar{S}^2S^4 \xRightarrow[\mathrm{C}[X]]{2} S^3$,
- $\bar{R}^3 \xLeftarrow[\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{} \bar{R}^3R^6 \xRightarrow[\mathrm{C}[X]]{3} R^3$,
- $R^3 \xLeftarrow[\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{} S^4R^3 = S^2(S^2R^3) \xRightarrow[\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{} S^2$

が成り立つ．よって特に $|w| = 0$ の場合に主張が成り立つ．$|w| > 0$ のとき，先頭の文字だけ分離して $w = aw_0$ $(w_0 \in \Sigma_X^*, a \in \Sigma_X)$ と表すと，帰納法の仮定から $aw_0\tilde{r}\bar{w}_0\bar{a} \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} aS^2\bar{a}$ が成り立つ．あとは a によって場合分けすれば

- $SS^2\bar{S} \xRightarrow[\mathrm{C}[X]]{} S^2$,
- $\bar{S}S^2S \xRightarrow[\mathrm{C}[X]]{} S^2$,
- $RS^2\bar{R} \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} RR^3\bar{R} \xRightarrow[\mathrm{C}[X]]{} R^3 \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} S^2$,
- $\bar{R}S^2R \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} \bar{R}R^3R \xRightarrow[\mathrm{C}[X]]{} R^3 \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} S^2$. □

よって式 (4.3) と合わせて $w \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} S^{2n}$ を得る．補題 4.25 の (1) $\Longrightarrow$ (3) を用いれば $[w]^{-1}[S^{2n}] \in \langle\!\langle S^4, R^6, S^2R^3 \rangle\!\rangle_{\mathrm{F}(S,R)} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ だから $I = \varphi([w]) = \varphi([S^{2n}]) = \varphi([S^2])^n = (-I)^n$ となり，n は偶数でなければならない．以上より $w \xLeftrightarrow[\mathrm{C}[X]\cup\mathrm{E}[\tilde{R}_1]]{*} \varepsilon$ を得る． □

4.8 半直積

群の半直積は群の直積の一般化であり，群が別の群に作用しているときに自然に現れる群の構成法である．線形代数において内部直和と (外部) 直和があったのと同様に，半直積にも内部半直積がある．

定義 4.74 (内部半直積). G を群，$H \leq G$ をその部分群，$N \triangleleft G$ を正規部分群とする．ここで条件

(1) $G = NH$,
(2) $N \cap H = \{1_G\}$

が成り立つとき，G は H と N の**内部半直積** (inner semidirect product) であるという．

補題 4.75. 群 G が部分群 $H \leq G$ と正規部分群 $N \triangleleft G$ の内部半直積であるとき，すべての元 $g \in G$ はただ一つの組 $(n, h) \in N \times H$ によって $g = nh$ と書ける．

証明．$G = NH$ だから $g = nh$ となる組 $(n, h) \in N \times H$ が存在することはよい．$(n_1, h_1), (n_2, h_2) \in N \times H$ が $n_1h_1 = n_2h_2$ をみたすならば $N \ni n_2^{-1}n_1 = h_2h_1^{-1} \in H$ だから $N \cap H = \{1_G\}$ より $n_2^{-1}n_1 = 1_G = h_2h_1^{-1}$ でなければならない．よって $(n_1, h_1) = (n_2, h_2)$ となるので一意性が成り立つ． □

したがって群 G が $H \leq G$ と $N \triangleleft G$ の内部半直積であるとき，2 つの組 $(n_1, h_1), (n_2, h_2) \in N \times H$ に対し積 $n_1h_1 \cdot n_2h_2 = n_1(h_1n_2h_1^{-1}) \cdot h_1h_2$ は組 $(n_1(h_1n_2h_1^{-1}), h_1h_2) \in N \times H$ によって一意的に書ける (N の正規性を用い

た)．ここで $h_1 n_2 h_1^{-1}$ は共役作用 $(-)^{h_1} \in \mathrm{Aut}(N)$ による n_2 の像とみなせる．このような観察から，次の (外部) 半直積の定義を得る．

定義 4.76 (半直積).　H と N を群とし，H の N への作用 $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ があるとする．このとき H と N の**半直積** (semidirect product) $N \rtimes_\alpha H$[10] を，直積集合 $N \times H$ 上に二項演算

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1 \alpha(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

を備えた代数構造として定義する．作用 α が文脈から明らかなときは $N \rtimes_\alpha H$ を省略して単に $N \rtimes H$ とも書く．

半直積が実際に群になっていることはそれほど自明なことではない．

補題 4.77.　半直積 $N \rtimes_\alpha H$ は実際に群になっている．

証明．(結合律) 任意の $(n_1, h_1), (n_2, h_2), (n_3, h_3) \in N \times H$ について，$\alpha(h_1) \in \mathrm{Aut}(N)$ が群準同型写像であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
((n_1, h_1)(n_2, h_2))(n_3, h_3) &= (n_1 \cdot \alpha(h_1)(n_2), h_1 h_2)(n_3, h_3) \\
&= (n_1 \cdot \alpha(h_1)(n_2) \cdot \alpha(h_1 h_2)(n_3), h_1 h_2 h_3) \\
&= (n_1 \cdot \alpha(h_1)(n_2) \cdot \alpha(h_1) \circ \alpha(h_2)(n_3), h_1 h_2 h_3) \\
&= (n_1 \cdot \alpha(h_1)(n_2 \cdot \alpha(h_2)(n_3)), h_1 h_2 h_3) \\
&= (n_1, h_1)(n_2 \cdot \alpha(h_2)(n_3), h_2 h_3) \\
&= (n_1, h_1)((n_2, h_2)(n_3, h_3))
\end{aligned}$$

となる．

(単位元) $(1_N, 1_H) \in N \times H$ を考えれば，各元 $(n, h) \in N \times H$ について

$$\begin{aligned}
(1_N, 1_H)(n, h) &= (1_N \alpha(1_H)(n), 1_H h) = (\mathrm{id}_N(n), h) = (n, h), \\
(n, h)(1_N, 1_H) &= (n \alpha(h)(1_N), h 1_H) = (n 1_N, h) = (n, h)
\end{aligned}$$

となる．

(逆元) 各元 $(n, h) \in N \times H$ に対し，

$$\begin{aligned}
(n, h)(\alpha(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}) &= (n \alpha(h)(\alpha(h^{-1})(n^{-1})), h h^{-1}) = (n \alpha(h h^{-1})(n^{-1}), 1_H) \\
&= (n \alpha(1_H)(n^{-1}), 1_H) = (n n^{-1}, 1_H) = (1_N, 1_H), \\
(\alpha(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})(n, h) &= (\alpha(h^{-1})(n^{-1}) \alpha(h^{-1})(n), h^{-1} h) = (\alpha(h^{-1})(n^{-1} n), 1_H) \\
&= (\alpha(h^{-1})(1_N), 1_H) = (1_N, 1_H)
\end{aligned}$$

となるので $(n, h)^{-1} = (\alpha(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}) \in N \times H$ を得る． □

作用 $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ が自明，すなわち $\mathrm{Im}(\alpha) = \{\mathrm{id}_N\}$ のときは $N \rtimes_\alpha H \cong N \times H$ となるので，半直積は実際に直積の一般化になっていることがわかる．

前述の内部半直積に関する観察から，次の同値性を得る．

---

[10] 半直積を $H \ltimes_\alpha N$ でなく $N \rtimes_\alpha H$ で表す理由は，α が左作用であることによる．実際，直積 $H \times N$ に演算を $(h_1, n_1)(h_2, n_2) := (h_1 h_2, \alpha(h_2)(n_1) n_2)$ で定義すると，補題 4.77 の結合律は成り立たなくなる．

補題 4.78. 半直積と内部半直積について，以下が成り立つ．

(1) 群 G が部分群 $H \leq G$ と正規部分群 $N \lhd G$ の内部半直積であるとき，H の元による共役作用 $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ について同型 $G \cong N \rtimes_\alpha H$ が成り立つ．

(2) 半直積 $G := N \rtimes_\alpha H$ について，$H \leq G, N \lhd G$ とみなすことができ，さらにこのとき G は H と N の内部半直積になっている．

証明. (1) 各元 $g \in G$ に対し，補題 4.75 よりただ一つ存在する組 $(n, h) \in N \times H$ を対応させることにより，全単射 $G \to N \rtimes_\alpha H$ を得る．これが群準同型写像であることは補題 4.75 直後の観察による．

(2) 写像 $i_H\colon H \to G$ を $h \in H$ に対し $i_H(h) := (1_N, h)$ と定義し，同様に写像 $i_N\colon N \to G$ を $n \in N$ に対し $i_N(n) := (n, 1_H)$ と定義する．i_H と i_N は明らかに単射である．任意の $h_1, h_2 \in H$ について $i_H(h_1)i_H(h_2) = (1_N, h_1)(1_N, h_2) = (1_N\alpha(h_1)(1_N), h_1h_2) = (1_N, h_1h_2) = i_H(h_1h_2)$ なので i_H は群準同型写像である．同様に任意の $n_1, n_2 \in N$ について $i_N(n_1)i_N(n_2) = (n_1, 1_H)(n_2, 1_H) = (n_1\alpha(1_H)(n_2), 1_H) = (n_1n_2, 1_H) = i_N(n_1n_2)$ なので i_N も群準同型写像である．よって $i_H(H), i_N(N) \leq G$ であることはよい．また任意の $n \in N$ と $(n_1, h_1) \in G$ に対し

$$\begin{aligned}(n_1, h_1)i_N(n)(n_1, h_1)^{-1} &= (n_1, h_1)(n, 1_H)(n_1, h_1)^{-1} = (n_1\alpha(h_1)(n), h_1)(\alpha(h_1^{-1})(n_1^{-1}), h_1^{-1})\\ &= (n_1\alpha(h_1)(n)\alpha(h_1)(\alpha(h_1^{-1})(n_1^{-1})), 1_H) = (n_1\alpha(h_1)(n)n_1^{-1}, 1_H)\\ &= i_N(n_1\alpha(h_1)(n)n_1^{-1}) \in i_N(N)\end{aligned}$$

となるので $i_N(N) \lhd G$ が成り立つ．また，任意の $(n, h) \in G$ に対し $(n, h) = (n\alpha(1_H)(1_N), 1_Hh) = (n, 1_H)(1_N, h) = i_N(n)i_H(h)$ となるので $G = i_N(N)i_H(H)$ が成り立つ．$i_N(N) \cap i_H(H) = \{1_G\}$ は定義より明らか． □

半直積の例をいくつか見てみよう．

例 4.79. **アフィン変換群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.** n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の**アフィン変換** (affine transformation) 全体の集合を

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) := \{\, f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \exists (A, \boldsymbol{b}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \, [f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}] \,\}$$

と定義する．ただし，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{\, A\colon n \text{ 次実正方行列} \mid \det(A) \neq 0 \,\}$ は $\mathbb{R}$ 上の n 次一般線形群を表す．作用 $\alpha\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ を通常の乗法により $\alpha(A)(\boldsymbol{x}) := A\boldsymbol{x}$ と定めると，半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ における演算は

$$(\boldsymbol{b}_2, A_2)(\boldsymbol{b}_1, A_1) = (\boldsymbol{b}_2 + \alpha(A_2)(\boldsymbol{b}_1), A_2A_1) = (A_2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, A_2A_1)$$

となり，これは 2 つのアフィン変換 $f_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$ と $f_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ の合成

$$f_2 \circ f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1) = A_2(A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1) + \boldsymbol{b}_2 = A_2A_1\boldsymbol{x} + (A_2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)$$

に一致する．よって同型 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を得る[11]．

離散 Heisenberg 群 $H_{\mathbb{Z}}$. 離散 Heisenberg 群 $H_{\mathbb{Z}}$ を

$$H_{\mathbb{Z}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定義する (群になっていることの証明は容易)．行列 $x, y, z \in H_{\mathbb{Z}}$ をそれぞれ

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義する．簡単な計算により，任意の整数 $n, a, b, c \in \mathbb{Z}$ に対し

$$x^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$xz = zx, \qquad yz = zy, \qquad xy = zyx,$$

$$z^c y^b x^a = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

がわかる．式 (4.4) より $H_{\mathbb{Z}} = \langle x, y, z \rangle$ である．ここで部分群 $N, H \leq H_{\mathbb{Z}}$ をそれぞれ $N := \langle z, y \rangle, H := \langle x \rangle$ とおく．$N \lhd H_{\mathbb{Z}}$ であることを示す．式 (4.4) より，$H_{\mathbb{Z}}$ の任意の元は $z^c y^b x^a$ と書ける．$z \in \mathrm{Z}(H_{\mathbb{Z}})$ であることと，$xy = zyx$ より $x^a y = z^a y x^a$ であることに注意すれば，

$$(z^c y^b x^a) z (z^c y^b x^a)^{-1} = z (z^c y^b x^a)(z^c y^b x^a)^{-1} = z \in N,$$
$$(z^c y^b x^a) y (z^c y^b x^a)^{-1} = z^c y^b (x^a y) x^{-a} y^{-b} z^{-c} = z^c y^b (z^a y x^a) x^{-a} y^{-b} z^{-c} = z^a y \in N$$

となるので $N \lhd H_{\mathbb{Z}}$ が成り立つ．また，式 (4.4) より直ちに $H_{\mathbb{Z}} = NH$ と $N \cap H = \{I\}$ がわかるので，$H_{\mathbb{Z}}$ は H と N の内部半直積になっている．よって補題 4.78.(1) より同型 $H_{\mathbb{Z}} \cong \langle z, y \rangle \rtimes \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ を得る．

ある群が半直積で書けるための条件を与えるのが次の分裂補題である．

定理 4.80 (分裂補題 (splitting lemma)). 群 G, H, N に対し，次の 2 条件は同値である．

(1) 群の**短完全系列** (short exact sequence)

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1 \tag{4.5}$$

が存在する (すなわち i が単射な群準同型写像，π が全射な群準同型写像で $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(\pi)$ が成り立つ)．さらに，図式中の群準同型写像 $\pi\colon G \twoheadrightarrow H$ は**切断** (section) をもつ (すなわち $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$ となるような群準同型写像 $s\colon H \to G$ が存在する)．

(2) ある作用 $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ について同型 $G \cong N \rtimes_\alpha H$ が成り立つ．

一般に短完全系列が切断を持つとき，その短完全系列は**分裂する** (split) と言う．

証明． (1) $\Longrightarrow$ (2)． 補題 4.78.(1) より，G が $\mathrm{Im}(s) \leq G$ と $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(\pi) \lhd G$ の内部半直積であることを示せば十分である．s が切断であることより $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$ だから，任意の元 $g \in G$ に対し $\pi(s(\pi(g))) = \pi(g)$ が成り立つ．よって特に $\pi(gs(\pi(g))^{-1}) = \pi(g)\pi(s(\pi(g)))^{-1} = \pi(g)\pi(g)^{-1} = 1_G$ となるので $g = (gs(\pi(g))^{-1})s(\pi(g)) \in \mathrm{Ker}(\pi)\,\mathrm{Im}(s)$ となり，$G = \mathrm{Ker}(\pi)\,\mathrm{Im}(s)$ を得る．次に，元 $g \in \mathrm{Ker}(\pi) \cap \mathrm{Im}(s)$ を任意にとると，$g \in \mathrm{Im}(s)$ なのである元 $h \in H$ によって $g = s(h)$ と書ける．s が切断であることより $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$ だから，$g \in \mathrm{Ker}(\pi)$ と合わせて $h = \pi(s(h)) = \pi(g) = 1_H$ を得る．よって $g = s(h) = s(1_H) = 1_G$ だから $\mathrm{Ker}(\pi) \cap \mathrm{Im}(s) = \{1_G\}$ となる．

(2) $\Longrightarrow$ (1)． 群準同型写像 $i\colon N \hookrightarrow N \rtimes_\alpha H$ と $s\colon H \hookrightarrow N \rtimes_\alpha H$ を，補題 4.78.(2) の証明における記号を用いてそれぞれ $i := i_N, s := i_H$ と定義する．次に，写像 $\pi\colon N \rtimes_\alpha H \to H$ を $\pi(n, h) := h$ と定義する．π は明らかに全射である．各元 $(n_1, h_1), (n_2, h_2) \in N \rtimes_\alpha H$ に対し $\pi((n_1, h_1)(n_2, h_2)) = \pi(n_1\alpha(h_1)(n_2), h_1h_2) = h_1h_2 =$

[11] もちろん，細かいことを言えば $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ が半群として群 $\mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に同型だから特に $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ が群であることがわかる，ということである．とはいえ $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ が群であること自体は容易に確かめられるので，些細な問題ではある．

$\pi(n_1, h_1)\pi(n_2, h_2)$ となるので π は群準同型写像である．このとき $\mathrm{Im}(i) = \{(n, 1_H) \mid n \in N\} = \mathrm{Ker}(\pi)$ だから図式 (4.5) は短完全系列であり，また各元 $h \in H$ に対し $\pi \circ s(h) = \pi(1_N, h) = h$ となるので s は切断である． □

分裂補題を用いると，様々な群が半直積で書けることが示せる．

例 4.81. **対称群 S_n.**　自然数 $n \geq 2$ に対し，n 次対称群 S_n と n 次交代群 $A_n \triangleleft S_n$ をとり，包含写像 $i\colon A_n \hookrightarrow S_n$ と符号 $\mathrm{sgn}\colon S_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ を考えれば，図式

$$1 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\ i\ } S_n \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{\pm 1\} \longrightarrow 1$$

が短完全系列であることは容易にわかる．群準同型写像 $s\colon \{\pm 1\} \to S_n$ を例えば $s(-1) := (1, 2)$ と定義すると $\mathrm{sgn} \circ s = \mathrm{id}$ となるので，分裂補題 4.80 より同型 $S_n \cong A_n \rtimes \{\pm 1\}$ を得る．

位数 $2n$ の二面体群 D_n.　自然数 $n \geq 1$ に対し，二面体群 $D_n = \left\langle \sigma = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ をとり，包含写像 $i\colon \langle \sigma \rangle \hookrightarrow D_n$ と行列式 $\det\colon D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ を考えれば，図式

$$1 \longrightarrow \langle \sigma \rangle \xrightarrow{\ i\ } D_n \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \longrightarrow 1$$

が短完全系列であることは容易にわかる．群準同型写像 $s\colon \{\pm 1\} \to D_n$ を $s(-1) := \tau$ と定義すれば $\det \circ s = \mathrm{id}$ となるので，分裂補題 4.80 より同型 $D_n \cong \langle \sigma \rangle \rtimes \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を得る．

無限二面体群 D_∞.　$D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^2 \rangle * \langle b \mid b^2 \rangle = \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$ を無限二面体群とする．系 4.34 の自然な単射群準同型写像 $i_a\colon \langle a \mid a^2 \rangle \hookrightarrow D_\infty$ と $i_b\colon \langle b \mid b^2 \rangle \hookrightarrow D_\infty$ について，自由積の普遍性 (命題 4.32) より，図式

$$\begin{tikzcd}
\langle a \mid a^2 \rangle \arrow[r, hook, "i_a"] \arrow[dr, "\cong"'] & D_\infty \arrow[d, dashed, two heads, "\pi"] & \langle b \mid b^2 \rangle \arrow[l, hook', "i_b"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& \{\pm 1\} &
\end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $\pi\colon D_\infty \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ がただ一つ存在する．よって包含写像 $i\colon \mathrm{Ker}(\pi) \hookrightarrow D_\infty$ について，図式

$$1 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi) \xrightarrow{\ i\ } D_\infty \xrightarrow{\ \pi\ } \{\pm 1\} \longrightarrow 1$$

は短完全系列である．とり方から π は $\pi(a) = -1, \pi(b) = -1$ をみたす．よって群準同型写像 $s\colon \{\pm 1\} \to D_\infty$ を例えば $s(-1) := a$ と定義すると $\pi \circ s = \mathrm{id}$ となるので，分裂補題 4.80 より同型 $D_\infty \cong \mathrm{Ker}(\pi) \rtimes \{\pm 1\}$ を得る．D_∞ において $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = 2$ であることより，被約語 $w \in \Sigma[\langle a \mid a^2 \rangle, \langle b \mid b^2 \rangle]^*$ は a または b が交互に並んだ文字列である．よって π のとり方から $w \in \mathrm{Ker}(\pi) \iff |w| \equiv 0 \pmod 2$ であるので，$w \in \mathrm{Ker}(\pi)$ ならばある $n \in \mathbb{N}$ について $w = (ab)^n$ または $w = (ba)^n$ という形をしている．D_∞ において $ba = (ab)^{-1}$ であることに注意すれば $\mathrm{Ker}(\pi) = \langle ab \rangle_{D_\infty}$ を得る．以上より，同型 $D_\infty \cong \langle ab \rangle \rtimes \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ を得る．

4.9 HNN 拡大

本章の締めくくりとして，群の HNN 拡大について取り扱う．群の HNN 拡大は自由積・融合積とともに 10 章で扱う Bass–Serre 理論の中核をなす，(組合せ) 群論において重要な構成法であるが，その重要性に反して知名度はそれほど高くない．

定義 4.82 (HNN 拡大).　群 G と，群 A からの 2 つの**単射**群準同型写像 $\varphi, \psi\colon A \hookrightarrow G$ に対し，φ, ψ に関する G の **HNN 拡大** (Higman–Neumann–Neumann[12] extension, HNN extension) を

$$G *_A \ := (G * \mathrm{F}(t))/\langle\!\langle \{\, i_1(t)i(\psi(a))i_1(t)^{-1}i(\varphi(a))^{-1} \mid a \in A \,\}\rangle\!\rangle$$

と定義する (ただし，$i\colon G \hookrightarrow G*\mathrm{F}(t), i_1\colon \mathrm{F}(t) \hookrightarrow G*\mathrm{F}(t)$ は系 4.34 の単射である)．定義中の t を**安定文字** (stable letter) という．

位相空間の基本群の観点からは，群の HNN 拡大は空間に**ハンドル** (handle) を取り付ける操作に相当するものである．HNN 拡大に $G *_A$ という (一見) 奇妙な記号法を用いる理由については，10 章において群付きグラフの基本群を調べる際に明らかになる．

融合積のときと同じく，まずは HNN 拡大の普遍性から確認しよう．

命題 4.83 (HNN 拡大の普遍性).　群 G と群 A からの 2 つの**単射**群準同型写像 $\varphi, \psi\colon A \hookrightarrow G$ をとり，その HNN 拡大を $G^* := G *_A$，商写像を $\pi\colon G * \mathrm{F}(t) \twoheadrightarrow G^*$ とおく．さらに $j := \pi \circ i\colon G \to G^*, j_1 := \pi \circ i_1\colon \mathrm{F}(t) \to G^*$ とおく．群 H と群準同型写像 $f\colon G \to H$，元 $s \in H$ が

$$\forall a \in A\, [sf(\psi(a))s^{-1} = f(\varphi(a))]$$

をみたすとき，図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & G^* \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & H \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $f'\colon G^* \to H$ であって，$f'(j_1(t)) = s$ をみたすようなものがただ一つ存在する．

証明. $N := \langle\!\langle \{\, i_1(t)i(\psi(a))i_1(t)^{-1}i(\varphi(a))^{-1} \mid a \in A \,\}\rangle\!\rangle$ とおくと，$G^* = (G * \mathrm{F}(t))/N$ と書ける．自由群の普遍性 (命題 4.15) より $f_1(t) = s$ となる群準同型写像 $f_1\colon \mathrm{F}(t) \to H$ がただ一つ存在する．自由積の普遍性 (命題 4.32) より，$\hat{f} \circ i = f$ かつ $\hat{f} \circ i_1 = f_1$ となる群準同型写像 $\hat{f}\colon G * \mathrm{F}(t) \to H$ がただ一つ存在する．自由積 $G * \mathrm{F}(t)$ の任意の元はある語 $\underline{g_1}\,\underline{t^{e_1}}\,\underline{g_2}\,\underline{t^{e_2}} \cdots \underline{g_n}\,\underline{t^{e_n}} \in \Sigma[G, \mathrm{F}(t)]^*$ ($g_i \in G, e_i \in \mathbb{Z}$ で，$g_i = 1_G$ や $e_i = 0$ でもよい) によって $i(g_1)i_1(t^{e_1})i(g_2)i_1(t^{e_2}) \cdots i(g_n)i_1(t^{e_n})$ と書け，よってその商である HNN 拡大 G^* のどの元も $j(g_1)j_1(t^{e_1})j(g_2)j_1(t^{e_2}) \cdots j(g_n)j_1(t^{e_n})$ の形に書ける．よって，命題の図式が可換であり，なおかつ $f'(j_1(t)) = s$ となるためには，f' が群準同型写像でなければならないことから

$$\begin{aligned}
&(f' \circ \pi)(i(g_1)i_1(t^{e_1})i(g_2)i_1(t^{e_2}) \cdots i(g_n)i_1(t^{e_n})) \\
&= f'(\pi(i(g_1)))f'(\pi(i_1(t^{e_1})))f'(\pi(i(g_2)))f'(\pi(i_1(t^{e_2}))) \cdots f'(\pi(i(g_n)))f'(\pi(i_1(t^{e_n}))) \\
&= f'(j(g_1))f'(j_1(t^{e_1}))f'(j(g_2))f'(j_1(t^{e_2})) \cdots f'(j(g_n))f'(j_1(t^{e_n})) \\
&= f(g_1)s^{e_1}f(g_2)s^{e_2} \cdots f(g_n)s^{e_n} \\
&= \hat{f}(i(g_1))\hat{f}(i_1(t^{e_1}))\hat{f}(i(g_2))\hat{f}(i_1(t^{e_2})) \cdots \hat{f}(i(g_n))\hat{f}(i_1(t^{e_n})) \\
&= \hat{f}(i(g_1)i_1(t^{e_1})i(g_2)i_1(t^{e_2}) \cdots i(g_n)i_1(t^{e_n}))
\end{aligned}$$

[12] ちなみに，Higman–Neumann–Neumann の 3 人のうち 2 人目の Bernhard H. Neumann と 3 人目の Hanna Neumann は夫婦であり，1 人目の Graham Higman は Neumann 夫妻の息子 Peter M. Neumann の指導教官である．

でなければならない．すなわち，$f' \circ \pi = \hat{f}$ が成り立たなければならない．まとめると，図式

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook, "i"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, "j"'] & G * \mathrm{F}(t) \arrow[dr, dashed, "\hat{f}"] \arrow[dd, two heads, "\pi"] & \\
 & & H \\
\mathrm{F}(t) \arrow[uur, hook, "i_1"] \arrow[r, "j_1"'] \arrow[urr, bend right, "f_1"'] & G^* \arrow[ur, dashed, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

がある．このように定義される f' が well-defined であることを示す．実際，各元 $a \in A$ に対し，

$$\begin{aligned}
\hat{f}(i_1(t)i(\psi(a))i_1(t)^{-1}i(\varphi(a))^{-1}) &= \hat{f}(i_1(t))\hat{f}(i(\psi(a)))\hat{f}(i_1(t))^{-1}\hat{f}(i(\varphi(a)))^{-1} \\
&= f_1(t)f(\psi(a))f_1(t)^{-1}f(\varphi(a))^{-1} \\
&= sf(\psi(a))s^{-1}f(\varphi(a))^{-1} \\
&= f(\varphi(a))f(\varphi(a))^{-1} && (s \text{ に関する仮定より}) \\
&= 1_H
\end{aligned}$$

だから $N \subseteq \mathrm{Ker}(\hat{f})$ となり，よって補題 4.1 より f' は well-defined である．□

例 4.84.　群 G に対し，群準同型写像 $\{1\} \to G$ は自明なものしかないので，同型 $G *_{\{1\}} \cong G * \mathrm{F}(t) \cong G * \mathbb{Z}$ が成り立つ．

融合積のときと同じように，HNN 拡大を語と文字列書き換え系を用いて表そう．群 G と，群 A からの 2 つの**単射**群準同型写像 $\varphi, \psi \colon A \hookrightarrow G$ をとる．このとき (有限とは限らない) アルファベット $\Sigma[G; A]$ を

$$\Sigma[G; A] := (G - \{1_G\}) \sqcup \{\mathtt{t}, \bar{\mathtt{t}}\}$$

と定義する．文字列 $w \in \Sigma[G; A]^*$ のことを ($\Sigma[G; A]^*$ の) **語** (word) と呼ぶ．各元 $g \in G$ や $t^n \in \mathrm{F}(t)$ を "文字化" する写像 $\underline{(\cdot)} \colon G \sqcup \mathrm{F}(t) \to \Sigma[G; A] \cup \{\varepsilon\}$ を

$$\underline{g} := \begin{cases} g & (g \neq 1_G \text{ のとき}), \\ \varepsilon & (g = 1_G \text{ のとき}), \end{cases} \qquad \underline{t^n} := \begin{cases} \mathtt{t}^n & (n > 0 \text{ のとき}), \\ \varepsilon & (n = 0 \text{ のとき}), \\ \bar{\mathtt{t}}^{-n} & (n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．$\varphi(A)\backslash G, \psi(A)\backslash G$ の完全代表系 C_φ, C_ψ であって $C_\varphi \ni 1_G \in C_\psi$ となるものをとる．アルファベット $\Sigma[G; A]$ 上の文字列書き換え系 $\mathrm{S}[G; A] \subseteq \Sigma[G; A]^* \times \Sigma[G; A]^*$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}[G; A] := \{(\mathtt{t}\bar{\mathtt{t}}, \varepsilon), (\bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}, \varepsilon)\} &\cup \{\, (\underline{g_1}\,\underline{g_2}, \underline{g_1 g_2}) \mid g_1, g_2 \in G - \{1_G\} \,\} \\
&\cup \{\, (\mathtt{t}\underline{\psi(a)c_\psi}, \underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{c_\psi}) \mid a \in A - \{1_A\}, c_\psi \in C_\psi \,\} \\
&\cup \{\, (\bar{\mathtt{t}}\underline{\varphi(a)c_\varphi}, \underline{\psi(a)}\bar{\mathtt{t}}\underline{c_\varphi}) \mid a \in A - \{1_A\}, c_\varphi \in C_\varphi \,\}
\end{aligned}$$

と定義する．

命題 4.85.　群 G と，群 A からの 2 つの**単射**群準同型写像 $\varphi, \psi \colon A \hookrightarrow G$ に対し，群としての同型

$$G *_A \; \cong \Sigma[G; A]^* / \xleftrightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{*}$$

が成り立つ．

証明．両辺をそれぞれ $G^* := G *_A$, $M := \Sigma[G;A]^*/\overset{*}{\underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longleftrightarrow}}$ とおく．M に well-defined な商モノイドの構造が入ることは命題 1.17 よりよい．$G^* \cong M$ を証明するために，M が HNN 拡大の普遍性 (命題 4.83) と同じ条件をみたすことを示す．まず M が群であることを示す．$g \in G$ に対しては，$\mathrm{S}[G;A]$ の定義より $[\underline{g}][\underline{g^{-1}}] = [\varepsilon] = [\underline{g^{-1}}][\underline{g}]$ だから $[\underline{g}]^{-1} = [\underline{g^{-1}}]$ となる．また $\mathtt{t}\bar{\mathtt{t}} \underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longrightarrow} \varepsilon \underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longleftarrow} \bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}$ より $[\mathtt{t}][\bar{\mathtt{t}}] = [\varepsilon] = [\bar{\mathtt{t}}][\mathtt{t}]$ だから $[\mathtt{t}]^{-1} = [\bar{\mathtt{t}}], [\bar{\mathtt{t}}]^{-1} = [\mathtt{t}]$ となり，M の各生成元が逆元を持つので M は群である．写像 $i' \colon G \to M$ を $i'(g) := [\underline{g}]$ で定める．任意の 2 元 $g_1, g_2 \in G$ に対し，$\mathrm{S}[G;A]$ の定義から $\underline{g_1 g_2} \overset{*}{\underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longleftrightarrow}} \underline{g_1}\,\underline{g_2}$ であるので ($g_1 = 1_G$ または $g_2 = 1_G$ のときにも成り立つことに注意)，$i'(g_1 g_2) = [\underline{g_1 g_2}] = [\underline{g_1}\,\underline{g_2}] = [\underline{g_1}][\underline{g_2}] = i'(g_1)i'(g_2)$ となり，i' は群準同型写像である．H を群，$f \colon G \to H$ を群準同型写像とし，さらに元 $s \in H$ について $\forall a \in A\ [sf(\psi(a))s^{-1} = f(\varphi(a))]$ が成り立つとする．写像 $f' \colon M \to H$ を，各元 $[w] \in M$ ($w = \underline{g_1}\,\underline{t^{e_1}}\,\underline{g_2}\,\underline{t^{e_2}} \cdots \underline{g_n}\,\underline{t^{e_n}} \in \Sigma[G;A]^*, g_i \in G, e_i \in \mathbb{Z}$，$g_i = 1_G$ や $e_i = 0$ でもよい) に対し

$$f'([w]) := f(g_1)s^{e_1} f(g_2)s^{e_2} \cdots f(g_n)s^{e_n} \tag{4.6}$$

と定義する．ここで f' が well-defined であるためには，$u \underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longrightarrow} v$ ならば $f'([u]) = f'([v])$ であることを言えば十分であるが，これは $\mathrm{S}[G;A]$ の定義と s のとり方より

(1) $f'([\mathtt{t}\bar{\mathtt{t}}]) = ss^{-1} = 1_H = f'([\varepsilon])$，同様に $f'([\bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}]) = s^{-1}s = 1_H = f'([\varepsilon])$，
(2) $g_1, g_2 \in G - \{1_G\}$ に対し $f'([\underline{g_1}\,\underline{g_2}]) = f(g_1)f(g_2) = f(g_1 g_2) = f'([\underline{g_1 g_2}])$，
(3) $a \in A - \{1_A\}, c_\psi \in C_\psi$ に対し $f'([\mathtt{t}\underline{\psi(a)c_\psi}]) = sf(\psi(a)c_\psi) = sf(\psi(a))f(c_\psi) = f(\varphi(a))sf(c_\psi) = f'([\underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{c_\psi}])$，
(4) $a \in A - \{1_A\}, c_\varphi \in C_\varphi$ に対し $f'([\bar{\mathtt{t}}\underline{\varphi(a)c_\varphi}]) = s^{-1}f(\varphi(a)c_\varphi) = s^{-1}f(\varphi(a))f(c_\varphi) = f(\psi(a))s^{-1}f(c_\varphi) = f'([\underline{\psi(a)}\bar{\mathtt{t}}\underline{c_\varphi}])$，

であることからわかる．各元 $g \in G$ に対し $f' \circ i'(g) = f'([\underline{g}]) = f(g)$ が成り立つので，可換図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "f'"] \\ & H \end{tikzcd}$$

を得，また $f'([\mathtt{t}]) = s$ も成り立つ．逆に，上の図式が可換でかつ $f'([\mathtt{t}]) = s$ となるためには f' を (4.6) のように定めるしかない．以上より，系 4.33 とほぼ同様の方法で同型 $G^* \cong M$ を得る．□

次に，書き換え系 $\mathrm{S}[G;A]$ に関する被約語について議論する．w が抽象書き換え系 $\mathrm{S}[G;A]$ に関して正規形 (定義 1.9) であるとき，w を**被約語**と呼ぶ．すなわち，被約語とは $\mathrm{IRR}(\mathrm{S}[G;A])$ の元のことである．命題 4.85 より $\Sigma[G;A]^*$ の語を HNN 拡大の元とみなすことができ，逆に HNN 拡大のどの元も $\Sigma[G;A]^*$ のある語によって表せる．

命題 4.51 と同様に，$\mathrm{S}[G;A]$ についても収束性が証明できる．

命題 4.86. $\Sigma[G;A]$ 上の文字列書き換え系 $\mathrm{S}[G;A]$ は収束的，すなわち局所合流的かつ停止性を持つ．

証明．まず，停止性を背理法で示す．導出の無限列

$$w_0 \underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longrightarrow} w_1 \underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longrightarrow} w_2 \underset{\mathrm{S}[G;A]}{\Longrightarrow} \cdots \tag{4.7}$$

が存在すると仮定する．$\mathrm{S}[G;A]$ には $\mathtt{t}, \bar{\mathtt{t}}$ の個数を増やす規則はないので，十分大きな $i \in \mathbb{N}$ に対して $|w_i|_{\mathtt{t}} + |w_i|_{\bar{\mathtt{t}}}$ は一定の値に落ち着く．よって，最初の有限項を取り除くことで，無限列 (4.7) において書き換え規則 $(\mathtt{t}\bar{\mathtt{t}}, \varepsilon), (\bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}, \varepsilon) \in \mathrm{S}[G;A]$ は用いられていないとしてよい．$|w_0|_{\mathtt{t}} + |w_0|_{\bar{\mathtt{t}}}$ に関する帰納法で矛盾を示す．$|w_0|_{\mathtt{t}} + |w_0|_{\bar{\mathtt{t}}} = 0$ のとき，

各 w_i に適用可能な規則は $(\underline{g_1g_2}, \underline{g_1g_2}) \in \mathrm{S}[G;A]$ の形のものしかなく，この形の規則は長さ $|w_i|$ を減少させるので，列 (4.7) が無限に続くことに矛盾する．$|w_0|_{\mathtt{t}} + |w_0|_{\bar{\mathtt{t}}} \geq 1$ のとき，各 $i \in \mathbb{N}$ に対しある語 $u_i \in \Sigma[G;A]^*$ と $v_i \in (G - \{1_G\})^*$ があって，すべての $i \in \mathbb{N}$ に対し $w_i = u_i\mathtt{t}v_i$ と書けるか，またはすべての $i \in \mathbb{N}$ に対し $w_i = u_i\bar{\mathtt{t}}v_i$ と書ける ($\mathrm{S}[G;A]$ は $\mathtt{t}$ と $\bar{\mathtt{t}}$ の位置を入れ換える規則を持たないことに注意)．前者の場合についてのみ証明する (後者の場合も同様である)．各語 $\mathtt{t}v_i$ に適用可能な規則は $(\underline{g_1g_2}, \underline{g_1g_2}), (\mathtt{t}\underline{\psi(a)}c_\psi, \underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{c_\psi}) \in \mathrm{S}[G;A]$ の形のものしかないので，長さ $|v_i|$ は広義単調減少になる．よって十分大きな $i \in \mathbb{N}$ に対しては長さ $|v_i|$ は一定の値に落ち着く．このような i に対し $\mathtt{t}v_i$ に適用されうる規則は $(\mathtt{t}\underline{\psi(a)}c_\psi, \underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{c_\psi}) \in \mathrm{S}[G;A]$ の形のものしかありえないが，この形の規則は ($a \neq 1_A$ という条件により) 二度以上連続して適用することはできない．したがって十分大きなある $i \in \mathbb{N}$ 以降では語 $\mathtt{t}v_i$ は一切変化しないので，最初の有限項を取り除くことで最初から $\mathtt{t}v_i$ は一定であるとしてよい．よって新たな無限列

$$u_0 \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} u_1 \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} u_2 \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} \cdots$$

が得られ，このとき $|u_0|_{\mathtt{t}} + |u_0|_{\bar{\mathtt{t}}} = |w_0|_{\mathtt{t}} + |w_0|_{\bar{\mathtt{t}}} - 1$ だから帰納法の仮定から矛盾が得られる．よって $\mathrm{S}[G;A]$ は停止性を持つ．

次に，局所合流性を示す．語 $u, v_1, v_2 \in \Sigma[G;A]^*$ について，$v_1 \xLeftarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} u \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} v_2$ であるとする．書き換えられている部分が非自明に重なっている場合についてのみ証明する (他の場合は容易)．そのようなケースは以下のものしかない．

($u = u_1\underline{g_1}\underline{g_2}\underline{g_3}u_2$ のとき) $v_1 = u_1\underline{g_1g_2}\underline{g_3}u_2, v_2 = u_1\underline{g_1}\underline{g_2g_3}u_2$ とすると $v_1 \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{\leq 1} u_1\underline{g_1g_2g_3}u_2 \xLeftarrow[\mathrm{S}[G;A]]{\leq 1} v_2$ となる ($g_1g_2 = 1_G$ や $g_2g_3 = 1_G$ かもしれないことに注意)．

($u = u_1\mathtt{t}\bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}u_2$ または $u = u_1\bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}\bar{\mathtt{t}}u_2$ のとき) どちらの場合にせよ，$v_1 = v_2$ となるのでよい．

($u = \bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}\underline{\psi(a)}c_\psi$ または $u = \mathtt{t}\bar{\mathtt{t}}\underline{\varphi(a)}c_\varphi$ のとき) 前者の場合，$v_1 = \underline{\psi(a)}c_\psi, v_2 = \bar{\mathtt{t}}\underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{c_\psi}$ とすると，$a \neq 1_A$ だから $v_2 \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} \underline{\psi(a)}\bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}\underline{c_\psi} \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} \underline{\psi(a)}\underline{c_\psi} \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} v_1$ となる．後者の場合も同様である．

($u = \mathtt{t}\underline{\psi(a)}\underline{c_\psi g}$ または $u = \bar{\mathtt{t}}\underline{\varphi(a)}\underline{c_\varphi g}$ のとき) 前者の場合，$c_\psi g = \psi(a')c'_\psi$ となる一意的な組 $(a', c'_\psi) \in A \times C_\psi$ と，$\psi(a)c_\psi g = \psi(a'')c''_\psi$ となる一意的な組 $(a'', c''_\psi) \in A \times C_\psi$ をとると $\psi(a'')c''_\psi = \psi(a)c_\psi g = \psi(a)\psi(a')c'_\psi = \psi(aa')c'_\psi$ となる．よって ψ が単射であることと C_ψ が $\psi(A)\backslash G$ の完全代表系であることから $a'' = aa'$ かつ $c'_\psi = c''_\psi$ が成り立つ．したがって $v_1 = \underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{c_\psi}\underline{g}, v_2 = \mathtt{t}\underline{\psi(a)c_\psi g}$ とすると $v_1 \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{} \underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{c_\psi g} = \underline{\varphi(a)}\mathtt{t}\underline{\psi(a')c'_\psi} \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{\leq 1} \underline{\varphi(a)}\underline{\varphi(a')}\mathtt{t}\underline{c'_\psi} \xRightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{\leq 1} \underline{\varphi(a)\varphi(a')}\mathtt{t}\underline{c'_\psi} = \underline{\varphi(a'')}\mathtt{t}\underline{c''_\psi} \xLeftarrow[\mathrm{S}[G;A]]{\leq 1} \mathtt{t}\underline{\psi(a'')c''_\psi} = \mathtt{t}\underline{\psi(a)c_\psi g} = v_2$ となる．後者の場合も同様である．

以上より局所合流性が成り立つ． □

命題 4.86 と定理 1.10 より，$\Sigma[G;A]^*$ のどの語に対しても，それと同値な被約語がただ一つすることがわかる．

系 4.87. 群 G と群 A からの 2 つの単射群準同型写像 $\varphi, \psi\colon A \hookrightarrow G$ について，群準同型写像 $j\colon G \to G *_A$ と $j_1\colon \mathrm{F}(t) \to G *_A$ も単射となる．

証明．j が単射であることをいうためには，命題 4.85 の証明中の写像 $i'\colon G \to \Sigma[G;A]^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{*}$ が単射であることを言えばよい．任意に元 $g \in \mathrm{Ker}(i')$ をとると $[\underline{g}] = i'(g) = [\varepsilon]$ だから $\underline{g} \xLeftrightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{*} \varepsilon$ をみたす．ここで $\underline{g}$ と ε はどちらも被約語だから，命題 4.86 より $\underline{g} = \varepsilon$，すなわち $g = 1_G$ でなければならず，よって i' は単射である．

次に，j_1 が単射であることを示すために，写像 $i'_1\colon \mathrm{F}(t) \to \Sigma[G;A]^*/\xLeftrightarrow[\mathrm{S}[G;A]]{*}$ を $i'_1(t^n) := [\underline{t^n}]$ と定義し，i'_1 が単射であることを示す．定義からどの $n \in \mathbb{Z}$ に対しても $\underline{t^n}$ は $\Sigma[G;A]^*$ の被約語であり，$m \neq n$ ならば $\underline{t^m} \neq \underline{t^n}$ が成り

立つ．よって命題 4.86 より $i_1'(t^m)=[\underline{t^m}]\neq[\underline{t^n}]=i_1'(t^n)$ となるので i_1' は単射である． □

例 4.88.　G を群，$\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$ とすると，φ,id_G に関する G の HNN 拡大は $G*_G\cong G\rtimes_{(t\mapsto\varphi)}\mathrm{F}(t)$ となる．このことを示すために，分裂補題 4.80 を利用する．以下，命題 4.83 と同じ記号を用いる．自由積の普遍性 (命題 4.32) より，図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "g\mapsto 1_{\mathrm{F}(t)}"'] & G*\mathrm{F}(t) \arrow[d, dashed, "\pi_1"] & \mathrm{F}(t) \arrow[l, hook', "i_1"'] \arrow[dl, equal, "\mathrm{id}_{\mathrm{F}(t)}"] \\ & \mathrm{F}(t) & \end{tikzcd}$$

を可換にする群準同型写像 $\pi_1\colon G*\mathrm{F}(t)\to\mathrm{F}(t)$ がただ一つ存在する．ここで合成 $\mathrm{id}_{\mathrm{F}(t)}=\pi_1\circ i_1$ が全射なので π_1 も全射である．このとき任意の元 $g\in G$ に対し

$$\begin{aligned}\pi_1(i_1(t)i(\mathrm{id}_G(g))i_1(t)^{-1}i(\varphi(g))^{-1}) &= \pi_1(i_1(t))\pi_1(i(\mathrm{id}_G(g)))\pi_1(i_1(t))^{-1}\pi_1(i(\varphi(g)))^{-1}\\ &= t1_{\mathrm{F}(t)}t^{-1}1_{\mathrm{F}(t)}^{-1}\\ &= 1_{\mathrm{F}(t)}\end{aligned}$$

となるので補題 4.1 より $\bar{\pi}_1\circ\pi=\pi_1$ となる群準同型写像 $\bar{\pi}_1\colon G*_G\to\mathrm{F}(t)$ がただ一つ存在する．ここで合成 $\pi_1=\bar{\pi}_1\circ\pi$ が全射なので $\bar{\pi}_1$ も全射である．系 4.87 より $j\colon G\to G*_G$ と $j_1\colon\mathrm{F}(t)\to G*_G$ はどちらも単射である．よって図式

$$\begin{tikzcd} & & G*\mathrm{F}(t) \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, two heads, bend left, "\pi_1"] & & \\ 1 \arrow[r] & G \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[r, hook, "j"] & G*_G \arrow[r, two heads, "\bar{\pi}_1"] & \mathrm{F}(t) \arrow[ul, "i_1"'] \arrow[l, bend left, "j_1"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

を考えれば $\bar{\pi}_1\circ j_1=\bar{\pi}_1\circ\pi\circ i_1=\pi_1\circ i_1=\mathrm{id}_{\mathrm{F}(t)}$ がわかり，さらに任意の $g\in G$ に対して $(\bar{\pi}_1\circ j)(g)=(\bar{\pi}_1\circ\pi\circ i)(g)=(\pi_1\circ i)(g)=1_{\mathrm{F}(t)}$ となるので $\mathrm{Im}(i)\subseteq\mathrm{Ker}(\bar{\pi}_1)$ を得る．最後に，$\mathrm{Ker}(\bar{\pi}_1)\subseteq\mathrm{Im}(i)$ であることを示す．命題 4.85 の同型 $G*_G\cong M:=\Sigma[G;G]^*/\xleftrightarrow[\mathrm{S}[G;G]]{*}$ を通じて，j は $j\colon G\to M;g\mapsto[\underline{g}]$ という写像とみなすことができ，$\bar{\pi}_1$ は $\bar{\pi}_1\colon M\to\mathrm{F}(t)$ であって $\bar{\pi}_1([\mathtt{t}]):=t,\bar{\pi}_1([\bar{\mathtt{t}}]):=t^{-1},\bar{\pi}_1([\underline{g}]):=1_{\mathrm{F}(t)}$ という写像であるとみなせる．任意の元 $g\in G$ に対し，$\mathrm{S}[G;G]$ の定義から $\mathtt{t}\underline{g}=\mathtt{t}\,\underline{\mathrm{id}_G(g)}\xRightarrow[\mathrm{S}[G;G]]{\leq 1}\underline{\varphi(g)}\mathtt{t}$ かつ $\bar{\mathtt{t}}\underline{g}=\bar{\mathtt{t}}\underline{\varphi(\varphi^{-1}(g))}\xRightarrow[\mathrm{S}[G;G]]{\leq 1}\underline{\mathrm{id}_G(\varphi^{-1}(g))}\bar{\mathtt{t}}=\underline{\varphi^{-1}(g)}\bar{\mathtt{t}}$ となる．よってどんな元 $[w]\in M$ もある $g\in G$ と $n\in\mathbb{Z}$ によって $[w]=[\underline{g}\underline{t^n}]$ と表せる．このとき $[w]\in\mathrm{Ker}(\bar{\pi}_1)$ ならば $1_{\mathrm{F}(t)}=\bar{\pi}_1([w])=\bar{\pi}_1([\underline{g}\underline{t^n}])=\bar{\pi}_1([\underline{g}])\bar{\pi}_1([\underline{t^n}])=1_{\mathrm{F}(t)}t^n=t^n$ となるから $n=0$ でなければならず，$[w]=[\underline{g}]=j(g)\in\mathrm{Im}(j)$ を得る．以上より図式 (4.8) の下段は分裂する短完全系列だから同型 $G*_G\cong G\rtimes_{(t\mapsto\varphi)}\mathrm{F}(t)\cong G\rtimes_{(1\mapsto\varphi)}\mathbb{Z}$ を得る．

最後に，非自明な HNN 拡大の一例として Baumslag–Solitar 群を取り上げて本節を終える．

定義 4.89 (Baumslag–Solitar 群 [BS62]).　整数 $m,n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ に対し，**Baumslag–Solitar 群** (Baumslag–Solitar group) は

$$\mathrm{BS}(m,n):=\langle\, a,b\mid ba^mb^{-1}=a^n\,\rangle$$

で定義される有限表示群である．

例 4.27 より $\mathrm{BS}(1,1)\cong\mathbb{Z}^2$ が成り立つ．一般には次のようにして HNN 拡大で書ける．

補題 4.90. 単射群準同型写像 $\varphi, \psi\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ を $\varphi(1) := n, \psi(1) := m$ で定義すると，$\mathbb{Z}$ の φ, ψ に関する HNN 拡大 $\mathbb{Z}*_{\mathbb{Z}}$ について同型 $\mathbb{Z}*_{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{BS}(m,n)$ が成り立つ．

証明． HNN 拡大の定義 4.82 より

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}*_{\mathbb{Z}} &= (\mathbb{Z} * \mathrm{F}(t))/\langle\!\langle \{\, i_1(t)i(\psi(k))i_1(t)^{-1}i(\varphi(k))^{-1} \mid k \in \mathbb{Z} \,\}\rangle\!\rangle \\ &\cong \mathrm{F}(a,t)/\langle\!\langle \{\, t(a^m)^k t^{-1}(a^n)^{-k} \mid k \in \mathbb{Z} \,\}\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

$t(a^{-m})^k t^{-1}(a^n)^k = (a^n)^{-k}(t(a^m)^k t^{-1}(a^n)^{-k})^{-1}(a^n)^k$ だから

$$\begin{aligned}&= \mathrm{F}(a,t)/\langle\!\langle \{\, t(a^m)^k t^{-1}(a^n)^{-k} \mid k > 0 \,\}\rangle\!\rangle \\ &= \mathrm{F}(a,t)/\langle\!\langle \{\, (ta^m t^{-1})^k (a^{-n})^k \mid k > 0 \,\}\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

一般に $A^kB^k = \prod_{l=0}^{k-1} B^{-l}(AB)B^l$ だから

$$\begin{aligned}&= \mathrm{F}(a,t)/\langle\!\langle \{\, \prod_{l=0}^{k-1}(a^{-n})^{-l}(ta^m t^{-1}a^{-n})(a^{-n})^l \mid k > 0 \,\}\rangle\!\rangle \\ &= \mathrm{F}(a,t)/\langle\!\langle ta^m t^{-1}a^{-n} \rangle\!\rangle = \langle\, a, t \mid ta^m t^{-1} = a^n \,\rangle = \mathrm{BS}(m,n)\end{aligned}$$

を得る． □

命題 4.91 ([BS62, Theorem 1], [LS01, Chapter IV, Theorem 4.9])**.** Baumslag–Solitar 群 $\mathrm{BS}(2,3) = \langle\, a, b \mid ba^2b^{-1} = a^3 \,\rangle$ は**非 Hopf 群** (non-hopfian group) である．すなわち，単射でない全射な群準同型写像 $f\colon \mathrm{BS}(2,3) \twoheadrightarrow \mathrm{BS}(2,3)$ が存在する．言い換えると，$\mathrm{BS}(2,3)$ は自身の非自明なある剰余群と同型になる．

証明． 群準同型写像 $f\colon \mathrm{BS}(2,3) \to \mathrm{BS}(2,3)$ を $f(a) := a^2, f(b) := b$ で定義し，この f が条件をみたすことを示す．

(well-defined 性) $\mathrm{BS}(2,3)$ において $f(ba^2b^{-1}a^{-3}) = ba^4b^{-1}a^{-6} = (ba^2b^{-1})^2a^{-6} = (a^3)^2a^{-6} = 1$ が成り立つので，補題 4.28 よりよい．

(全射性) $\mathrm{BS}(2,3)$ において $a = a^3a^{-2} = ba^2b^{-1}a^{-2} = f(bab^{-1}a^{-1}) = f([b,a])$ が成り立つのでよい．

(非単射性) $\mathrm{BS}(2,3)$ において $f(a^{-1}[b,a]^2) = f(a)^{-1}f([b,a])^2 = a^{-2}a^2 = 1$ が成り立つので，$\mathrm{BS}(2,3)$ において $a^{-1}[b,a]^2 \neq 1$ であることを示せばよい．補題 4.90 より，群準同型写像 $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{F}(a); 1 \mapsto a^3, \psi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{F}(a); 1 \mapsto a^2$ について同型 $\mathrm{BS}(2,3) \cong \mathrm{F}(a)*_{\mathbb{Z}}$ が成り立つ．このとき $\Sigma[\mathrm{F}(a);\mathbb{Z}] = (\mathrm{F}(a) - \{1\}) \cup \{\mathtt{t}, \bar{\mathtt{t}}\}$ であり，$C_\varphi = \{a^{-1}, 1, a\}, C_\psi = \{1, a\}$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{S}[\mathrm{F}(a);\mathbb{Z}] = \{(\mathtt{t}\bar{\mathtt{t}}, \varepsilon), (\bar{\mathtt{t}}\mathtt{t}, \varepsilon)\} &\cup \{\, (\underline{a^k}\,\underline{a^l}, \underline{a^{k+l}}) \mid k, l \in \mathbb{Z} - \{0\} \,\} \\ &\cup \{\, (\mathtt{t}\underline{a^{2q+r}}, \underline{a^{3q}}\mathtt{t}\underline{a^r}) \mid q \in \mathbb{Z} - \{0\}, r \in \{0,1\} \,\} \\ &\cup \{\, (\bar{\mathtt{t}}\underline{a^{3q+r}}, \underline{a^{2q}}\bar{\mathtt{t}}\underline{a^r}) \mid q \in \mathbb{Z} - \{0\}, r \in \{-1,0,1\} \,\}\end{aligned}$$

なので，語 $w := \underline{a^{-1}}(\mathtt{t}\underline{a}\bar{\mathtt{t}}\underline{a^{-1}})^2 \in \Sigma[\mathrm{F}(a);\mathbb{Z}]^*$ は空でない被約語である．よって命題 4.86 より w は $\mathrm{BS}(2,3)$ において単位元を表さない． □

第 5 章

群の語の問題

5.1 定義と基本性質

本節では群の語の問題の定義と基本的な性質を述べる．これにより，Muller–Schupp の定理 0.1 の主張に含まれる「文脈自由言語」,「実質的自由群」,「群の語の問題」という 3 つの用語すべての説明が完了することになる．

定義 5.1 (群の語の問題). G を有限生成群，Σ を有限アルファベット，$\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ を全射なモノイド準同型写像とする．群 G の (π に関する) **語の問題** (word problem) とは，G の単位元 1_G の π による逆像

$$\mathrm{WP}_\pi(G) := \pi^{-1}(1_G)$$

として定義される Σ 上の言語である．

単なる文字列の集合 $\mathrm{WP}_\pi(G)$ のことを語の「問題」と呼ぶ一見不可解な用語法は，次のようにして説明できる．2 つの語 $u, v \in \Sigma^*$ に対し，$\pi(\bar{u}) = \pi(u)^{-1}$ となる $\bar{u} \in \Sigma^*$ をとると，$\bar{u}v \in \mathrm{WP}_\pi(G) \iff \pi(u) = \pi(v)$ が成り立つ．すなわち，$\mathrm{WP}_\pi(G)$ は「与えられた 2 つの語が群 G において同じ元を表すか否か」という判定問題の解答を与えているのである．

例 5.2. **位数 n (≥ 1) の有限巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.** $\Sigma := \{a\}$ とし，$\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $\pi(a) := 1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で定義すると $\mathrm{WP}_\pi(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 0 \pmod{n} \,\}$ である．

階数 n の自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$. $\Sigma := \{a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ とし，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $e_i \in \mathbb{Z}^n$ を標準基底 (すなわち，第 i 成分のみが 1 で他の成分がすべて 0 であるような元) とするとき，$\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^n$ を $\pi(a_i) := e_i, \pi(\bar{a}_i) := -e_i$ で定義すると $\mathrm{WP}_\pi(\mathbb{Z}^n) = \{\, w \in \Sigma^* \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ [|w|_{a_i} = |w|_{\bar{a}_i}] \,\}$ である．特に，$n = 1$ のとき $\mathrm{WP}_\pi(\mathbb{Z}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_{a_1} = |w|_{\bar{a}_1} \,\}$ である．

有限生成群 G の語の問題 $\mathrm{WP}_\pi(G)$ はアルファベット Σ とモノイド準同型写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ に依存する言語であるが，性質のよい特定の言語クラスに所属するか否かを考える場合には Σ や π のとり方に依存しないことが次のようにして示せる．

命題 5.3. $\mathcal{L}$ をモノイド準同型の逆像をとる操作で閉じた言語クラスとする．このとき，有限生成群 G と有限アルファベット Σ, Δ，全射モノイド準同型写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G, \rho\colon \Delta^* \twoheadrightarrow G$ に対し，

$$\mathrm{WP}_\pi(G) \in \mathcal{L} \implies \mathrm{WP}_\rho(G) \in \mathcal{L}$$

が成り立つ．特に，「$\mathrm{WP}_\pi(G) \in \mathcal{L}$ であるかどうか」は π のとり方によらずに定まる．

証明． $\mathrm{WP}_\pi(G) \in \mathcal{L}$ であるとする．このときモノイド準同型写像 $h\colon \Delta^* \to \Sigma^*$ で図式

$$\begin{tikzcd} \Sigma^* \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ \Delta^* \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものがとれる．$\mathcal{L}$ が逆像をとる操作で閉じていることより，$\mathrm{WP}_\rho(G) = \rho^{-1}(1_G) = (\pi \circ h)^{-1}(1_G) = h^{-1}(\pi^{-1}(1_G)) = h^{-1}(\mathrm{WP}_\pi(G)) \in \mathcal{L}$ を得る． □

系 5.4. 有限生成群の語の問題が正則言語であるかどうか，文脈自由言語であるかどうかは生成系のとり方によらない．

証明． 命題 5.3 と定理 2.50，定理 2.51 より． □

命題 5.3 と同様にして，より強く次が証明できる．

命題 5.5. $\mathcal{L}$ をモノイド準同型の逆像をとる操作で閉じた言語クラスとする．さらに，G を有限生成群であって，語の問題が $\mathcal{L}$ に属すようなものとする．このとき，G のどんな有限生成部分群 $H \leq G$ の語の問題も $\mathcal{L}$ に属す．

証明． G を有限生成群，Σ を有限アルファベット，$\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ を全射なモノイド準同型写像とし，$\mathrm{WP}_\pi(G) \in \mathcal{L}$ とする．さらに，$H \leq G$ を有限生成部分群，$i\colon H \hookrightarrow G$ を包含写像，Δ を有限アルファベット，$\rho\colon \Delta^* \twoheadrightarrow H$ を全射なモノイド準同型写像とする．このときモノイド準同型写像 $h\colon \Delta^* \to \Sigma^*$ で図式

$$\begin{tikzcd} \Sigma^* \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ \Delta^* \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[r, two heads, "\rho"] & H \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

を可換にするものがとれる．i の単射性と $\mathcal{L}$ が逆像をとる操作で閉じていることより，$\mathrm{WP}_\rho(H) = \rho^{-1}(1_H) = \rho^{-1}(i^{-1}(1_G)) = (i \circ \rho)^{-1}(1_G) = (\pi \circ h)^{-1}(1_G) = h^{-1}(\pi^{-1}(1_G)) = h^{-1}(\mathrm{WP}_\pi(G)) \in \mathcal{L}$ を得る． □

本稿の目標である Muller–Schupp の定理 0.1 を仮定すると，命題 5.5 より実質的自由群の任意の有限生成部分群は実質的自由群でなければならない．実際にはより強く，(実質的) 自由群の (有限生成とは限らない) 任意の部分群が (実質的) 自由群になることが，7 章で示す Nielsen–Schreier の定理 (系 7.28) によりわかる．

5.2　有限群と正則言語の対応

本稿の目標であるところの Muller–Schupp の定理は文脈自由言語のクラスが実質的自由群のクラスに対応することを主張するものだが，その「ミニチュア版」とでも言うべき結果として，実は正則言語のクラスに対応する群のクラスが有限群のクラスであることが証明できる．本節ではこのことが統語モノイドを用いると容易に証明できることを見る．

補題 5.6 ([HT93, p. 197], [HRR17, 3.4.9 Proposition])**.** どんな有限生成群 G と全射モノイド準同型 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ についても，同型 $\mathrm{Syn}(\mathrm{WP}_\pi(G)) \cong G$ が成り立つ．

証明． 任意の $u, v \in \Sigma^*$ に対し，

$$\begin{aligned} u \equiv_{\mathrm{WP}_\pi(G)} v &\iff \forall x, y \in \Sigma^* \ [xuy \in \mathrm{WP}_\pi(G) \iff xvy \in \mathrm{WP}_\pi(G)] \\ &\iff \forall x, y \in \Sigma^* \ [\pi(xuy) = 1_G \iff \pi(xvy) = 1_G] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iff \forall x,y\in\Sigma^* \ [\pi(x)\pi(u)\pi(y)=1_G \iff \pi(x)\pi(v)\pi(y)=1_G]\\&\iff \forall x,y\in\Sigma^* \ [\pi(u)=\pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1} \iff \pi(v)=\pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1}]\end{aligned}$$

π の全射性より $\pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1}$ は G のすべての元を動くから

$$\begin{aligned}&\iff \forall g\in G\ [\pi(u)=g \iff \pi(v)=g]\\&\iff \pi(u)=\pi(v)\end{aligned}$$

となる．よって 2 つの写像 $\mathrm{Syn}(\mathrm{WP}_\pi(G))\to G; [w]\mapsto\pi(w)$ と $G\to\mathrm{Syn}(\mathrm{WP}_\pi(G)); \pi(w)\mapsto[w]$ はともに well-defined なモノイド準同型写像であり，かつ互いに逆写像になっている．モノイド準同型写像と群準同型写像が同じ定義であること，G が群であることに注意すると，群としての同型 $\mathrm{Syn}(\mathrm{WP}_\pi(G))\cong G$ を得る． □

系 5.7. どんな有限生成群 G も，ある言語の統語モノイドとして得られる．

証明. 補題 5.6 より． □

注意 5.8. 群の場合とは対照的に，どんな有限生成モノイドも統語モノイドとして得られるわけではない．それどころか，統語モノイドとして表せない**有限**モノイドが存在する．証明は例えば [Law04, Proposition 10.3.4] を見よ (正則言語の統語モノイドにならないことしか証明されていないように見えるかもしれないが，実は [Law04, Proposition 10.3.3] の証明の前半では統語モノイドの有限性は使っていないので問題ない)．

定理 5.9 (Anīsīmov [Anī72]). 有限生成群 G について，以下の 2 条件は同値である．

(1) G は有限群である．
(2) G の語の問題 $\mathrm{WP}(G)$ は正則言語である．

証明. 補題 5.6 と Myhill–Nerode の定理 2.20 より． □

5.3　実質的自由群の語の問題が文脈自由言語であること

ここでは Muller–Schupp の定理 0.1 の前半部分「実質的自由群の語の問題は文脈自由言語である」という主張を証明する．

例 5.10. はじめに，最も単純な場合として階数 n の自由群 $F_n=\mathrm{F}(\{x_1,\dots,x_n\})$ の語の問題が文脈自由言語であることを 2 通りの方法で証明する．$X:=\{x_1,\dots,x_n\}$ とおくと $\Sigma_X=\{x_1,\dots,x_n,\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n\}$ であり，$\pi\colon\Sigma_X^*\twoheadrightarrow F_n$ を商写像 $\pi(x_i):=x_i, \pi(\bar{x}_i):=x_i^{-1}$ で定義する．文脈自由文法 $C=(V,\Sigma_X,P,S)$ を

$$\begin{aligned}&V:=\{S\},\\&P:=\{S\to\varepsilon\mid SS\}\cup\{\,S\to xS\bar{x}\mid x\in\Sigma_X\,\}\end{aligned}$$

と定義すると $\mathrm{L}(C)=\mathrm{WP}_\pi(F_n)$ となることを示そう．この言語 $\mathrm{L}(C)$ を **Dyck 言語** (Dyck language) という．

($\subseteq$) 任意の語 $w\in\Sigma_X^*$ に対し，$S\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}}w$ ならば $w\overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}}\varepsilon$ であることを，導出 $S\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}}w$ の長さに関する帰納法で示す．長さが 1 のとき，$w=\varepsilon$ 以外ありえないので $w=\varepsilon\overset{0}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}}\varepsilon$ となる．次に，長さが 2 以上とし，最初に適用された規則で場合分けする．$S\underset{P}{\Longrightarrow}SS\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}}w$ のとき，$S\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}}u$ かつ $S\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}}v$ となる語 $u,v\in\Sigma_X^*$ があって $w=uv$ と分解できる．よって帰納法の仮定から $u\overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}}\varepsilon, v\overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}}\varepsilon$ であるので $w=uv\overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}}\varepsilon$ を得る．

次に，ある $x \in \Sigma_X$ について $S \underset{P}{\Longrightarrow} xS\bar{x} \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w$ であるとき，$S \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w_0$ となるある語 $w_0 \in \Sigma_X^*$ があって $w = xw_0\bar{x}$ と分解できる．よって帰納法の仮定から $w_0 \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} \varepsilon$ であるので $w = xw_0\bar{x} \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} x\bar{x} \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow} \varepsilon$ を得る．

($\supseteq$) 任意に語 $w \in \mathrm{WP}_\pi(F_n)$ をとると，語の問題の定義より $[w] = 1_{F_n} = [\varepsilon]$ であり，$\varepsilon \in \Sigma_X^*$ は自由被約語だから系 4.13 より $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} \varepsilon$ が成り立つ．任意の語 $u = u_1u_2\cdots u_m, v = v_1v_2\cdots v_n \in \Sigma_X^*$ $(m, n \geq 0, u_i, v_i \in \Sigma_X)$ に対し，$u \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} v$ ならば $Sv_1Sv_2S\cdots Sv_nS \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} Su_1Su_2S\cdots Su_mS$ が成り立つことを，導出 $u \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} v$ の長さに関する帰納法で示す．長さ 0 のとき，$u = v$ だから $Sv_1Sv_2S\cdots Sv_nS = Su_1Su_2S\cdots Su_mS$ なのでよい．長さが 1 以上のとき，導出 $u \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} v$ は $u \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow} u_1u_2\cdots u_iu_{i+3}\cdots u_m \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} v$ と分解できる．(このときある $x \in \Sigma_X$ について $u_{i+1}u_{i+2} = x\bar{x}$ である)．よって帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
Sv_1Sv_2S\cdots Sv_nS &\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} Su_1Su_2S\cdots Su_iSu_{i+3}S\cdots Su_mS \\
&\overset{2}{\underset{P}{\Longrightarrow}} Su_1Su_2S\cdots Su_iSSSu_{i+3}S\cdots Su_mS \\
&\underset{P}{\Longrightarrow} Su_1Su_2S\cdots Su_iSu_{i+1}Su_{i+2}Su_{i+3}S\cdots Su_mS
\end{aligned}
$$

を得る．以上より，特に $u = w = w_1w_2\cdots w_n$ $(w_i \in \Sigma_X)$ かつ $v = \varepsilon$ の場合を考えれば $S \underset{P}{\Longrightarrow} SS = S\varepsilon S \overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} Sw_1Sw_2S\cdots Sw_nS \overset{n+1}{\underset{P}{\Longrightarrow}} w_1w_2\cdots w_n = w$ となるので $w \in \mathrm{L}(C)$ を得る．

次に，$\mathrm{WP}_\pi(F_n)$ が決定性文脈自由言語であることを DPDA を用いて示す．DPDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma_X, Z, \delta, q_0, F)$ を

$$
\begin{aligned}
&Q := \{q_0, q\}, \\
&Z := \Sigma_X \cup \{\$\}, \\
&\delta := \{\, (q_0x, \$xq), (xq\bar{x}, q), (yqx, yxq) \mid x, y \in \Sigma_X, y \neq \bar{x} \,\} \cup \{(\$q, q_0)\}, \\
&F := \{q_0\}
\end{aligned}
$$

とおく．$\mathcal{A}$ が実際に決定性であることは容易に確かめられる．このとき $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \mathrm{WP}_\pi(F_n)$ であることを示す．

($\subseteq$) 任意の語 $w \in \Sigma_X^*$ について，

- ある語 $w' \in \Sigma_X^*$ について $q_0w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} q_0w'$ ならば $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} w'$,
- ある語 $u, v \in \Sigma_X^*$ について $q_0w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$uqv$ ならば $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} uv$

が成り立つことを，導出の長さに関する帰納法で示す．長さ 0 のときは明らか．長さが 1 以上のとき，最後に用いられた規則で場合分けする．

($(q_0x, \$xq) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $q_0w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} q_0xw' \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$xqw'$ $(w' \in \Sigma_X^*)$ という形をしている．よって帰納法の仮定から $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} xw'$ を得る．

($(xq\bar{x}, q) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $q_0w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$uxq\bar{x}v \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$uqv$ $(u, v \in \Sigma_X^*)$ という形をしている．よって帰納法の仮定から $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} ux\bar{x}v \underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow} uv$ を得る．

($(yqx, yxq) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $q_0w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$uyqxv \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$uyxqv$ $(u, v \in \Sigma_X^*)$ という形をしている．よって帰納法の仮定から $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} uyxv$ を得る．

($(\$q, q_0) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $q_0w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$qw' \underset{\delta}{\Longrightarrow} q_0w'$ $(w' \in \Sigma_X^*)$ という形をしている．よって帰納法の仮定から $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} w'$ を得る．

よって $w \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$ ならば δ の定義から $q_0w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} q_0$ でなければならないので，上の議論から $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} \varepsilon$ となり，$w \in \mathrm{WP}_\pi(F_n)$ を得る．

(⊇) 語 $w \in \Sigma_X^*$ に対し，系 4.13 よりただ一つ存在する，w と同値な被約語を $w{\downarrow}$ で表す．任意の語 $w \in \Sigma_X^*$ について $q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w{\downarrow}q$ が成り立つことを，長さ $|w|$ に関する帰納法で示す．長さ 0 のときは明らか．w に対して主張が成り立つとすると，帰納法の仮定より $q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w{\downarrow}q$ が成り立つ．文字 $x \in \Sigma_X$ を任意にとる．$w{\downarrow} = \varepsilon$ のとき，$q_0 wx \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w{\downarrow}qx = \$qx \underset{\delta}{\Longrightarrow} q_0 x \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$xq$ を得る．$w{\downarrow} \neq \varepsilon$ のとき，$w{\downarrow}$ の末尾の文字が $\bar{x}$ であれば $w{\downarrow} = w_1\bar{x}$ $(w_1 \in \mathrm{IRR}(\mathrm{C}[X]))$ と書けるので $q_0 wx \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w{\downarrow}qx = \$w_1\bar{x}qx \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$w_1 q$ を得，$w{\downarrow}$ の末尾の文字が $y \neq \bar{x}$ であれば $w{\downarrow} = w_1 y$ $(w_1 \in \mathrm{IRR}(\mathrm{C}[X]))$ と書けるので $q_0 wx \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w{\downarrow}qx = \$w_1 yqx \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$w_1 yxq$ を得る．以上より，$w \in \mathrm{WP}_\pi(F_n)$ ならば系 4.13 より $w \overset{*}{\underset{\mathrm{C}[X]}{\Longrightarrow}} \varepsilon$ だから $q_0 w \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w{\downarrow}q = \$q \underset{\delta}{\Longrightarrow} q_0$ となるので $w \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$ を得る．

定理 5.11. 有限生成な実質的自由群 G に対し，有限アルファベット Σ と全射モノイド準同型写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ をうまく選ぶと G の語の問題 $\mathrm{WP}_\pi(G)$ が決定性文脈自由言語になる．

証明の方針は次の通り．有限指数自由部分群 $H \leq G$ による右剰余類集合 $H\backslash G$ を状態集合とし，H の元を表す自由被約語をスタックに保持するような DPDA を構成する．

証明. G が実質的自由群であることより，有限指数部分群 $H \leq G$ であって，ある集合 X について同型 $H \cong \mathrm{F}(X)$ が成り立つようなものがある．命題 3.8 より H も有限生成だから補題 4.21 より X は有限集合である．よって $\Sigma := \Sigma_X \cup R$ とおくと Σ は有限アルファベットである．このとき全射なモノイド準同型写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ が自然に定まる．$H\backslash G$ の完全代表系 R で $1_G \in R$ なるものをとる．このとき，どの $r \in R, a \in \Sigma$ に対してもただ一つの組 $(\omega(r,a), \rho(r,a)) \in \mathrm{IRR}(\mathrm{C}[X]) \times R$ があって $\pi(ra) = \pi(\omega(r,a)\rho(r,a))$ と書ける．$N := \max\{\, |\omega(r,a)| \mid r \in R, a \in \Sigma \,\} + 1$ とおく．語 $w \in \Sigma_X^*$ に対し，系 4.13 よりただ一つ存在する，w と同値な自由被約語を $w{\downarrow}$ で表す．DPDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, \underline{q}, F)$ を

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{\underline{q}\} \cup \{\, \underline{r} \mid r \in R \,\},\\
Z &:= \Sigma_X \cup \{\$\},\\
\delta &:= \{(\underline{q}1_G, \underline{q})\} \cup \{\, (\underline{q}a, \$\omega(1_G,a)\underline{\rho(1_G,a)}) \mid a \in \Sigma, a \neq 1_G \,\}\\
&\qquad \cup \{\, (\$w\underline{r}a, \underline{q}) \mid w \in \Sigma_X^{<N}, r \in R, a \in \Sigma, \pi(w\omega(r,a)\rho(r,a)) = 1_G \,\}\\
&\qquad \cup \{\, (\$w\underline{r}a, \$(w\omega(r,a)){\downarrow}\underline{\rho(r,a)}) \mid w \in \Sigma_X^{<N}, r \in R, a \in \Sigma, \pi(w\omega(r,a)\rho(r,a)) \neq 1_G \,\}\\
&\qquad \cup \{\, (w\underline{r}a, (w\omega(r,a)){\downarrow}\underline{\rho(r,a)}) \mid w \in \Sigma_X^{N}, r \in R, a \in \Sigma \,\}\\
F &:= \{\underline{q}\}
\end{aligned}
$$

と定義する (ただしここで $\Sigma_X^{<N} := \bigcup_{n=0}^{N-1} \Sigma_X^n$ である)．$\mathcal{A}$ が実際に決定性であることは容易に確かめられる．$W, W' \in \Sigma^*, w \in \Sigma_X^*, r \in R$ について導出 $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}W'$ があるとき，N と δ のとり方から w は自由被約語であることに注意する．

($\mathrm{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{WP}_\pi(G)$ であること) 任意の $W \in \Sigma^*$ について，

- ある $W' \in \Sigma^*$ について $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}W'$ ならば $\pi(W) = \pi(W')$，
- ある $w \in \Sigma_X^*, r \in R, W' \in \Sigma^*$ について $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}W'$ ならば $\pi(W) = \pi(wrW')$

が成り立つことを，導出の長さに関する帰納法で示す．長さ 0 のときは明らか．長さが 1 以上のとき，最後に用いられた規則で場合分けする．

($(\underline{q}1_G, \underline{q}) \in \delta$ のとき) このとき導出は $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}1_G W' \underset{\delta}{\Longrightarrow} \underline{q}W'$ という形をしている．よって帰納法の仮定から $\pi(W) = \pi(1_G W') = \pi(W')$ を得る．

($(\underline{q}a, \$\omega(1_G,a)\underline{\rho(1_G,a)}) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}aW' \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\omega(1_G,a)\underline{\rho(1_G,a)}W'$ $(a \in$

$\Sigma - \{1_G\}, W' \in \Sigma^*$) という形をしている．よって帰納法の仮定から $\pi(W) = \pi(aW')$ が成り立つ．ω, ρ の定義から $\pi(a) = \pi(1_G a) = \pi(\omega(1_G, a)\rho(1_G, a))$ なので $\pi(aW') = \pi(\omega(1_G, a)\rho(1_G, a)W')$ が成り立つ．よって $\pi(W) = \pi(\omega(1_G, a)\rho(1_G, a)W')$ を得る．

($(\$w\underline{r}a, \underline{q}) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}aW' \underset{\delta}{\Longrightarrow} \underline{q}W'$ ($w \in \Sigma_X^{<N}, r \in R, a \in \Sigma, W' \in \Sigma^*, \pi(w\omega(r, a)\rho(r, a)) = 1_G$) という形をしている．よって帰納法の仮定から $\pi(W) = \pi(wraW')$ が成り立つ．ω, ρ の定義から $\pi(wra) = \pi(w\omega(r, a)\rho(r, a)) = 1_G$ なので $\pi(wraW') = \pi(W')$ が成り立つ．よって $\pi(W) = \pi(W')$ を得る．

($(\$w\underline{r}a, \$(w\omega(r, a))\!\downarrow\!\underline{\rho(r, a)}) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}aW' \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$(w\omega(r, a))\!\downarrow\!\underline{\rho(r, a)}W'$ ($w \in \Sigma_X^{<N}, r \in R, a \in \Sigma, W' \in \Sigma^*, \pi(w\omega(r, a)\rho(r, a)) \neq 1_G$) という形をしている．よって帰納法の仮定から $\pi(W) = \pi(wraW')$ が成り立つ．ω, ρ の定義から $\pi(ra) = \pi(\omega(r, a)\rho(r, a))$ なので $\pi(wraW') = \pi(w\omega(r, a)\rho(r, a)W') = \pi((w\omega(r, a))\!\downarrow\!\rho(r, a)W')$ が成り立つ．よって $\pi(W) = \pi((w\omega(r, a))\!\downarrow\!\rho(r, a)W')$ を得る．

($(w\underline{r}a, (w\omega(r, a))\!\downarrow\!\underline{\rho(r, a)}) \in \delta$ の形のとき) このとき導出は $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w_0w\underline{r}aW' \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$w_0(w\omega(r, a))\!\downarrow\!\underline{\rho(r, a)}W'$ ($w_0 \in \Sigma_X^*, w \in \Sigma_X^N, r \in R, a \in \Sigma, W' \in \Sigma^*$) という形をしている．よって帰納法の仮定から $\pi(W) = \pi(w_0wraW')$ が成り立つ．ω, ρ の定義から $\pi(ra) = \pi(\omega(r, a)\rho(r, a))$ なので $\pi(w_0wraW') = \pi(w_0w\omega(r, a)\rho(r, a)W') = \pi(w_0(w\omega(r, a))\!\downarrow\!\rho(r, a)W')$ が成り立つ．よって $\pi(W) = \pi(w_0(w\omega(r, a))\!\downarrow\!\rho(r, a)W')$ を得る．

よって $W \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$ ならば δ の定義から $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}$ でなければならないので，上の議論から $\pi(W) = \pi(\varepsilon) = 1_G$ となり，$W \in \mathrm{WP}_\pi(G)$ を得る．

($\mathrm{WP}_\pi(G) \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A})$ であること) 文字列 $W = a_1a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ ($a_i \in \Sigma$) を任意にとる．このとき，

- $\pi(W) = 1_G$ ならば $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}$,
- ある $w \in \mathrm{IRR}(\mathrm{C}[X]), r \in R$ について $\pi(W) = \pi(wr) \neq 1_G$ ならば $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}$

が成り立つことを，W の長さ n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らか．n で成り立つと仮定する．

($\pi(W) = 1_G$ のとき) このとき帰納法の仮定から $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}$ が成り立つ．$a_{n+1} \in \Sigma$ について，$a_{n+1} = 1_G \in R$ のときは $\pi(Wa_{n+1}) = 1_G$ かつ $\underline{q}Wa_{n+1} \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}a_{n+1} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \underline{q}$ となり，$a_{n+1} \neq 1_G$ のときは $\pi(Wa_{n+1}) = \pi(a_{n+1}) = \pi(1_Ga_{n+1}) = \pi(\omega(1_G, a_{n+1})\rho(1_G, a_{n+1})) \neq 1_G$ かつ $\underline{q}Wa_{n+1} \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}a_{n+1} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\omega(1_G, a)\underline{\rho(1_G, a)}$ となる．

($\pi(W) = \pi(wr) \neq 1_G$ のとき) このとき帰納法の仮定から $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}$ が成り立つ．$a_{n+1} \in \Sigma$ について，$\pi(Wa_{n+1}) = 1_G$ のときは $\pi(w\omega(r, a_{n+1})\rho(r, a_{n+1})) = \pi(wra_{n+1}) = \pi(Wa_{n+1}) = 1_G$ より $(w\omega(r, a_{n+1}), \rho(r, a_{n+1})) = (\varepsilon, 1_G)$ だから，特に $\pi(w) = \pi(\omega(r, a_{n+1}))^{-1}$ ゆえ $|w| < N$ でなければならないので $\underline{q}Wa_{n+1} \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}a_{n+1} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \underline{q}$ となる．$\pi(Wa_{n+1}) \neq 1_G$ のときは $\pi((w\omega(r, a_{n+1}))\!\downarrow\!\rho(r, a_{n+1})) = \pi(w\omega(r, a_{n+1})\rho(r, a_{n+1})) = \pi(wra_{n+1}) = \pi(Wa_{n+1}) \neq 1_G$ より $\underline{q}Wa_{n+1} \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \$w\underline{r}a_{n+1} \underset{\delta}{\Longrightarrow} \$(w\omega(r, a_{n+1}))\!\downarrow\!\underline{\rho(r, a_{n+1})}$ となる．

よって $W \in \mathrm{WP}_\pi(G)$ ならば $\pi(W) = 1_G$ だから上の議論から $\underline{q}W \overset{*}{\underset{\delta}{\Longrightarrow}} \underline{q}$ となるので $W \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$ を得る． □

例 5.12.　**無限二面体群 D_∞.**　例 4.81 より $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ と書ける．生成元を $x := (1, +1) \in \mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}, s := (0, -1) \in \mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ とおくと $H := \langle x \rangle_{D_\infty}$ は D_∞ の指数 2 の自由部分群であり，$H \backslash D_\infty$ の完全代表系として $R := \{1_{D_\infty}, s\}$ がとれる．このとき $N = \max\{\, |\omega(r, a)| \mid r \in R, a \in \Sigma \,\} + 1 = 2$ がわかるから，DPDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, \delta, \underline{q}, F)$ は

$$Q = \{\underline{q}, \underline{1_{D_\infty}}, \underline{s}\},$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \{1_{D_\infty}, s, x, \bar{x}\},\\
Z &= \{\$, x, \bar{x}\},\\
\delta &= \left\{
\begin{aligned}
&(\underline{q}1_{D_\infty}, \underline{q}), (\underline{q}s, \$\underline{s}), (\underline{q}x, \$x\underline{1_{D_\infty}}), (\underline{q}\bar{x}, \$\bar{x}\underline{1_{D_\infty}}),\\
&(\$\underline{1_{D_\infty}}1_{D_\infty}, \underline{q}), (\$\underline{1_{D_\infty}}s, \$\underline{s}), (\$\underline{1_{D_\infty}}x, \$x\underline{1_{D_\infty}}), (\$\underline{1_{D_\infty}}\bar{x}, \$\bar{x}\underline{1_{D_\infty}}),\\
&(\$\underline{s}1_{D_\infty}, \$\underline{s}), (\$\underline{s}s, \underline{q}), (\$\underline{s}x, \$\bar{x}\underline{s}), (\$\underline{s}\bar{x}, \$x\underline{s}),\\
&(\$x\underline{1_{D_\infty}}1_{D_\infty}, \$x\underline{1_{D_\infty}}), \dots, (\$x\underline{s}\bar{x}, \$xx\underline{s}),\\
&(\$\bar{x}\underline{1_{D_\infty}}1_{D_\infty}, \$\bar{x}\underline{1_{D_\infty}}), \dots, (\$\bar{x}\underline{s}\bar{x}, \$\underline{s}),\\
&(xx\underline{1_{D_\infty}}1_{D_\infty}, xx\underline{1_{D_\infty}}), \dots, (\bar{x}\bar{x}\underline{s}\bar{x}, \bar{x}\underline{s})
\end{aligned}
\right\},\\
F &= \{\underline{q}\}
\end{aligned}
$$

となる (ここで $|\delta| = 60$ である)．$\mathcal{A}$ において次のような導出がある．

$$
\begin{aligned}
\underline{q}sxsx\bar{x}s\bar{x}s &\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\underline{s}xsx\bar{x}s\bar{x}s\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\bar{x}\underline{s}sx\bar{x}s\bar{x}s\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\bar{x}\underline{1_{D_\infty}}x\bar{x}s\bar{x}s\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \underline{q}\bar{x}s\bar{x}s\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\bar{x}\underline{1_{D_\infty}}s\bar{x}s\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\bar{x}\underline{s}\bar{x}s\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$\underline{s}s\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \underline{q}.
\end{aligned}
$$

よって自然な写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow D_\infty$ について $sxsx\bar{x}s\bar{x}s \in \mathrm{WP}_\pi(D_\infty)$ を得る．

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ と Sanov 部分群． 系 4.65 より，レベル 2 の合同部分群 $\Gamma(2) = \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)) \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ における像を $\bar{\Gamma}(2) = \{\, A\{\pm I\} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid A \in \Gamma(2) \,\}$ とおくと $\bar{\Gamma}(2)$ は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の Sanov 部分群であり，第三同型定理より $\bar{\Gamma}(2)\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\bar{\Gamma}(2) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ が成り立つ．よって

$$
\begin{aligned}
\Sigma_X &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\},\\
R &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

ととれる．このとき定理 5.11 の証明に従って DPDA $\mathcal{A}$ を構成すると，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ における

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I
$$

という等式は $\mathcal{A}$ において次のような導出によって確かめられる．

$$
\begin{aligned}
\underline{q} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$ \underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \$ \underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\
&\underset{\delta}{\Longrightarrow} \underline{q}.
\end{aligned}
$$

系 5.13. 有限生成群な実質的自由群 G について，どんな有限アルファベット Σ と全射モノイド準同型写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ に対しても G の語の問題 $\mathrm{WP}_\pi(G)$ は文脈自由言語である．

証明. 定理 5.11 と系 5.4 より． □

決定性文脈自由言語のクラスがモノイド準同型の逆像をとる操作で閉じていることは付録??で見る．

第 III 部

グラフ

第 6 章

グラフに関する基礎知識

本稿の後半ではグラフとグラフへの群作用について取り扱う．本章では次章以降で必要となる，グラフに関する基本事項を説明する．本章の内容は [Ser80] の Chapter I, §2 に依るところが大きい．

6.1 グラフの定義

本稿におけるグラフの定義はいわゆる「無向多重グラフ」に近いものであるが，各無向辺が互いに逆向きの有向辺の組によって表される，という点が通常のグラフの定義とは少し異なる．

定義 6.1 (グラフ, cf. [Ser80, Chapter I, §2.1, Definition 1], [Bou16, CHAPITRE II, §2.1, Définition 1]). 本稿において**グラフ** (graph) Γ とは，以下のデータからなる 5 つ組 $(V, E, s, t, \bar{\cdot})$ である．

(1) **頂点** (vertex) の集合 V，
(2) **辺** (edge) の集合 E，
(3) 辺の**始点** (source, origin) を与える関数 $s\colon E \to V$，
(4) 辺の**終点** (target, terminus) を与える関数 $t\colon E \to V$，
(5) 辺の**反転** (inverse) を与える関数 $\bar{\cdot}\colon E \to E$ であって，すべての辺 $y \in E$[1] に対して以下の条件をみたすもの．
  (i) $\bar{y} \neq y$，
  (ii) $\bar{\bar{y}} = y$，
  (iii) $s(\bar{y}) = t(y)$，
  (iv) $t(\bar{y}) = s(y)$．

グラフ Γ の頂点集合 V と辺集合 E をそれぞれ $\mathrm{V}(\Gamma)$，$\mathrm{E}(\Gamma)$ とも表す．頂点集合 V と辺集合 E がどちらも有限集合であるようなグラフを**有限グラフ** (finite graph) という．

グラフ Γ に対し，辺集合 $\mathrm{E}(\Gamma)$ 上の二項関係 $\sim := \{\, (y, y') \in \mathrm{E}(\Gamma) \times \mathrm{E}(\Gamma) \mid y = y' \vee \bar{y} = y' \,\}$ を考えると，定義 6.1 の条件 (5).(ii) より $\sim$ が同値関係となることが容易にわかる．定義 6.1 の条件 (5).(i) より，辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ を含む同値類はちょうど 2 元からなる集合 $\{y, \bar{y}\} \subseteq \mathrm{E}(\Gamma)$ である．各同値類 $\{y, \bar{y}\}$ はグラフ中のひとつの無向辺を表しているものと考えると，定義 6.1 のグラフ Γ を図に描く際には商集合 $\mathrm{E}(\Gamma)/\sim$ の完全代表系を固定すると便利である．このような完全代表系をグラフの向きといい，形式的には次のように定義される．

[1] 辺に $e \in E$ でなく $y \in E$ という記号を用いている理由は [Ser80] の記法に合わせているからであるが，群の単位元との混同を避けるためという理由もある．

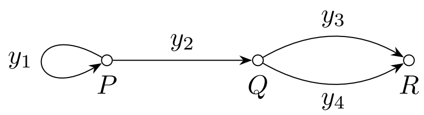
定義 6.2 (向き).　グラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ の**向き** (orientation) とは，辺の集合 $E_+ \subseteq E$ であって $E = E_+ \sqcup \overline{E_+}$ をみたすものをいう (ここで $\overline{E_+}$ は補集合を表す)．すなわち，各辺 $y \in E$ に対し $y \in E_+ \iff \bar{y} \notin E_+$ となるものをいう．

グラフ Γ の向き $E_+ \subseteq \mathrm{E}(\Gamma)$ は各無向辺 $\{y, \bar{y}\} \subseteq \mathrm{E}(\Gamma)$ からちょうど一方のみを取り出したものである．したがって Γ の向きはちょうど $2^{|\mathrm{E}(\Gamma)|/2}$ 個だけある[2]．

例 6.3.　頂点集合 $V := \{P, Q, R\}$ と辺集合 $E := \{y_1, y_2, y_3, y_4, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4\}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&s(y_1) := P, && t(y_1) := P, && s(\bar{y}_1) := P, && t(\bar{y}_1) := P,\\
&s(y_2) := P, && t(y_2) := Q, && s(\bar{y}_2) := Q, && t(\bar{y}_2) := P,\\
&s(y_3) := Q, && t(y_3) := R, && s(\bar{y}_3) := R, && t(\bar{y}_3) := Q,\\
&s(y_4) := Q, && t(y_4) := R, && s(\bar{y}_4) := R, && t(\bar{y}_4) := Q
\end{aligned}$$

とおけば $\Gamma := (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ はグラフになる．このとき $E_+ := \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \subseteq E$ は Γ の向きであり，E_+ に関して Γ を図示すれば



となる．

グラフの頂点に接続されている辺の本数を次数といい，正確には次のように定義される．

定義 6.4 (次数，局所有限グラフ).　グラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ の頂点 $P \in V$ の**次数** (degree) を，集合の濃度

$$\deg(P) := |\{\, y \in E \mid s(y) = P \,\}|$$

によって定義する．Γ がすべての頂点 $P \in V$ に対し $\deg(P) < \infty$ をみたすとき，Γ は**局所有限である** (locally finite) という．

例 6.5.　例 6.3 のグラフについて，

$$\deg(P) = |\{y_1, \bar{y}_1, y_2\}| = 3, \deg(Q) = |\{\bar{y}_2, y_3, y_4\}| = 3, \deg(R) = |\{\bar{y}_3, \bar{y}_4\}| = 2$$

である ($\deg(P) \neq 2$ に注意)．

6.2　部分グラフと誘導部分グラフ

定義 6.6 (部分グラフ，誘導部分グラフ).　$\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ をグラフとする．Γ の**部分グラフ** (subgraph) とは，部分集合 $V_0 \subseteq V$ と $E_0 \subseteq E$ の組であってそれ自身がグラフとなるようなものである．正確には，部分集合 $V_0 \subseteq V, E_0 \subseteq E$ であって制限写像 $s{\restriction}E_0 \colon E_0 \to V_0, t{\restriction}E_0 \colon E_0 \to V_0, \bar{\cdot}{\restriction}E_0 \colon E_0 \to E_0$ がすべて well-defined になる (すなわち像が V_0, E_0 に含まれる) ようなものについて，$(V_0, E_0, s{\restriction}E_0, t{\restriction}E_0, \bar{\cdot}{\restriction}E_0)$ と表せるグラフである．Γ_0 が Γ の部分グラフであることを $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ と表す．

部分グラフ $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ が Γ の**誘導部分グラフ** (induced subgraph) であるとは，

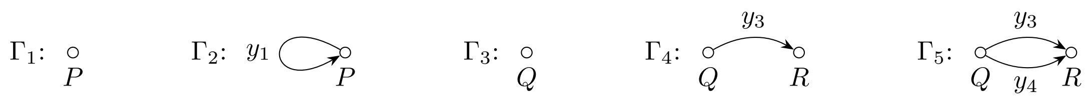
$$\forall y \in \mathrm{E}(\Gamma)\ [s(y), t(y) \in \mathrm{V}(\Gamma_0) \implies y \in \mathrm{E}(\Gamma_0)]$$

[2] 辺が無限にあるグラフであっても，Γ の向きの全体の集合の濃度は (選択公理のもとで) $2^{|\mathrm{E}(\Gamma)|}$ である．

をみたすことをいう．また，部分集合 $S \subseteq \mathrm{V}(\Gamma)$ が**誘導する** (induce) もしくは**張る** (span) Γ の誘導部分グラフ $\Gamma[S] \subseteq \Gamma$ を $\mathrm{V}(\Gamma[S]) := S, \mathrm{E}(\Gamma[S]) := \{\, y \in \mathrm{E}(\Gamma) \mid s(y), t(y) \in S \,\}$ で定義する．

$\Gamma[S]$ が実際に Γ の誘導部分グラフになっていることは容易に確かめられる．

例 6.7. 例 6.3 のグラフ Γ の 5 つの部分グラフ



について，$\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5$ は誘導部分グラフだが Γ_1, Γ_4 は誘導部分グラフではない．また，$\Gamma_2 = \Gamma[\{P\}], \Gamma_3 = \Gamma[\{Q\}], \Gamma_5 = \Gamma[\{Q, R\}]$ が成り立っている．

集合に対するいくつかの演算は部分グラフに対しても同様に定義できる．ここでは和集合についてのみ定義する．

定義 6.8 (部分グラフの和集合). グラフ Γ の部分グラフの族 $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の和を

$$\mathrm{V}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda\right) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{V}(\Gamma_\lambda), \qquad \mathrm{E}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda\right) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{E}(\Gamma_\lambda)$$

で定義する．実際に $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda$ が Γ の部分グラフになっていることは容易に確認できる．

6.3 グラフ準同型写像

群論において準同型写像という概念があるのと同様に，グラフに対しても準同型写像の概念が定義される．

定義 6.9 (グラフ準同型写像). $i = 1, 2$ に対し，$\Gamma_i = (V_i, E_i, s_i, t_i, \overline{\cdot}^i)$ をグラフとする．Γ_1 から Γ_2 への**グラフ準同型写像** (graph homomorphism) $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ とは，写像の組 $(f_V\colon V_1 \to V_2, f_E\colon E_1 \to E_2)$ であって次の条件をみたすものをいう．

(1) 各辺 $y \in E_1$ に対し $f_V(s_1(y)) = s_2(f_E(y)), f_V(t_1(y)) = t_2(f_E(y))$.
(2) 各辺 $y \in E_1$ に対し $f_E(\overline{y}^1) = \overline{f_E(y)}^2$.

以降，特に断らない限り f_V, f_E の添字は省略してどちらも単に f と書く．

すなわちグラフ準同型写像とは，頂点と辺の行き先を与える写像 f であって，グラフが備える 3 つの関数 $s, t, \overline{\cdot}$ のすべてと「可換な」もののことである．実際，定義 6.9 の条件は添字を省略して書けば $f(s(y)) = s(f(y)), f(t(y)) = t(f(y)), f(\overline{y}) = \overline{f(y)}$ と書ける．

定義 6.10 (単射，全射，同型写像). $\Gamma_i = (V_i, E_i, s_i, t_i, \overline{\cdot}^i)$ $(i = 1, 2)$ をグラフ，$f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ をグラフ準同型写像とする．f が**単射である** (injective) とは，2 つの写像 $f\colon V_1 \to V_2$ と $f\colon E_1 \to E_2$ がともに単射であることをいう．同様に，f が**全射である** (surjective) とは，2 つの写像 $f\colon V_1 \to V_2$ と $f\colon E_1 \to E_2$ がともに全射であることをいう．f が全射かつ単射であるとき f は**全単射である** (bijective) という．全単射なグラフ準同型写像 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ を**同型写像** (isomorphism) という．Γ_1 から Γ_2 への同型写像が存在するとき Γ_1 と Γ_2 は**同型である** (isomorphic) といい，記号 $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ で表す．

群の準同型像が終域の部分群になるように，グラフの準同型像も終域の部分グラフになる．

補題 6.11. $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ をグラフ準同型写像とする．$\mathrm{V}(\Gamma) := f(\mathrm{V}(\Gamma_1)) \subseteq \mathrm{V}(\Gamma_2), \mathrm{E}(\Gamma) := f(\mathrm{E}(\Gamma_1)) \subseteq \mathrm{E}(\Gamma_2)$ によって Γ_2 の部分グラフ $\Gamma \subseteq \Gamma_2$ が定義される．この Γ を f の**像** (image) といい，記号 $\mathrm{Im}(f) := \Gamma$ で表す．この $\mathrm{Im}(f)$ について，以下が成り立つ．

(1) f が単射ならば $\Gamma_1 \cong \mathrm{Im}(f)$ である．
(2) f が全射ならば $\mathrm{Im}(f) \cong \Gamma_2$ である．

証明．容易． □

通常の写像に対し，その定義域の部分集合への制限があるのと同様に，グラフ準同型写像に対しても部分グラフへの制限を考えることができる．

定義 6.12 (グラフ準同型写像の部分グラフへの制限). Γ_1, Γ_2 をグラフ，$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$ を部分グラフとする．グラフ準同型写像 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ に対し，頂点集合上の写像を $f_V\colon \mathrm{V}(\Gamma_1) \to \mathrm{V}(\Gamma_2)$，辺集合上の写像を $f_E\colon \mathrm{E}(\Gamma_1) \to \mathrm{E}(\Gamma_2)$ とするとき，$f = (f_V, f_E)$ の部分グラフ Γ_0 への制限を $f{\restriction}\Gamma_0 := (f_V{\restriction}\mathrm{V}(\Gamma_0), f_E{\restriction}\mathrm{E}(\Gamma_0))$ で定義する．容易にわかるように，$f{\restriction}\Gamma_0$ は Γ_0 から Γ_2 へのグラフ準同型写像である．

6.4　パスと閉路

ここでは，後の木の定義に必要となるパスと閉路の定義をする．後の説明を楽にするために，いくつかの特別なグラフのクラスを定義しておく．

定義 6.13 ($\mathsf{Path}_n, \mathsf{Cycle}_n$). $n \geq 0$ に対し，グラフ Path_n を

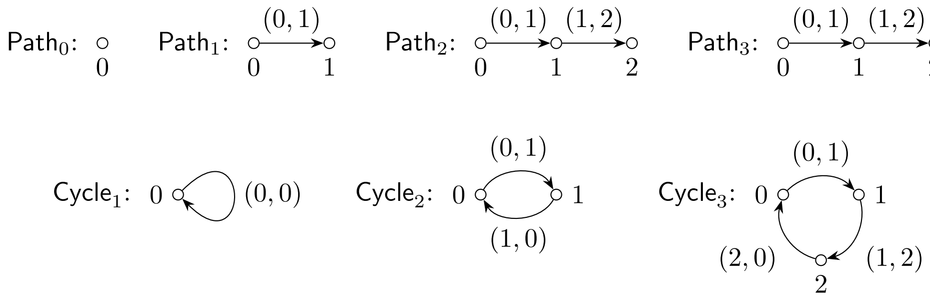
- $\mathrm{V}(\mathsf{Path}_n) := \{0, 1, \ldots, n\}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)_+ := \{\, (i, i+1) \mid 0 \leq i < n \,\} = \{(0,1), (1,2), \ldots, (n-1, n)\}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Path}_n) := \mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)_+ \sqcup \overline{\mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)_+}$，ただし $\overline{\mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)_+} = \{\, \bar{y} \mid y \in \mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)_+ \,\}$,
- $s((i, i+1)) = i, t((i, i+1)) = i+1$

と定義する．
同様に $n \geq 1$ に対し，グラフ Cycle_n を

- $\mathrm{V}(\mathsf{Cycle}_n) := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_n)_+ := \{\, (i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,\} = \{(0,1), (1,2), \ldots, (n-1, n) = (n-1, 0)\}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_n) := \mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_n)_+ \sqcup \overline{\mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_n)_+}$，ただし $\overline{\mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_n)_+} = \{\, \bar{y} \mid y \in \mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_n)_+ \,\}$,
- $s((i, i+1)) = i, t((i, i+1)) = i+1$

と定義する．

例 6.14.　小さい n に対して Path_n と Cycle_n を図示すると以下のようになる．



無限に長いバージョンも定義しておく．

定義 6.15 ($\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}, \mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$).　グラフ $\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}$ を

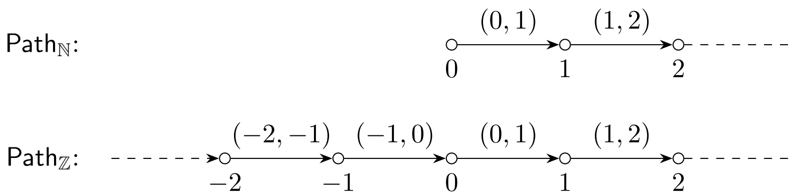
- $\mathrm{V}(\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}) := \mathbb{N}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{N}})_+ := \{\, (i, i+1) \mid i \in \mathbb{N} \,\}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}) := \mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{N}})_+ \sqcup \overline{\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{N}})_+}$，ただし $\overline{\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{N}})_+} = \{\, \bar{y} \mid y \in \mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{N}})_+ \,\}$,
- $s((i, i+1)) = i, t((i, i+1)) = i+1$

と定義する．同様に，グラフ $\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ を

- $\mathrm{V}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}) := \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}})_+ := \{\, (i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z} \,\}$,
- $\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}) := \mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}})_+ \sqcup \overline{\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}})_+}$，ただし $\overline{\mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}})_+} = \{\, \bar{y} \mid y \in \mathrm{E}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}})_+ \,\}$,
- $s((i, i+1)) = i, t((i, i+1)) = i+1$

と定義する．

例 6.16.　$\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}$ と $\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ を図示すると，それぞれ以下のようになる．



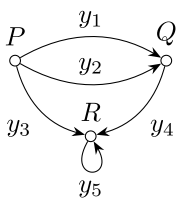
以上のグラフを用いてパスと閉路の定義をする．

定義 6.17 (パス，閉路).　$\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ をグラフとする．$n \geq 0$ に対し，Γ 内の長さ n の**パス** (path) とは，グラフ準同型写像 $f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ のことをいう．言い換えると，Γ 内の長さ n $(\neq 0)$ のパスとは Γ の辺の有限列 $\pi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(n \geq 1, y_i \in E)$ であって，$i = 1, 2, \ldots, n-1$ について $t(y_i) = s(y_{i+1})$ をみたすものである．Γ 内のパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ に対して，$f(0) \in V$ を f の**始点** (source, origin)，$f(n) \in V$ を f の**終点** (target, terminus) といい，両者を合わせて**端点** (endvertices, ends) と呼ぶ．パス f の始点 $f(0)$ と終点 $f(1)$ は f によって**結ばれている** (linked, 接続されている) という．Γ 内の**片側無限パス** (one-way infinite path) とは，グラフ準同型写像 $f\colon \mathsf{Path}_{\mathbb{N}} \to \Gamma$ のことをいう．Γ 内の**両側無限パス** (two-way infinite path, bi-infinite path) とは，グラフ準同型写像 $f\colon \mathsf{Path}_{\mathbb{Z}} \to \Gamma$ のことをいう．
$n \geq 1$ に対し，Γ 内の長さ n の**閉路** (cycle) とは，グラフ準同型写像 $f\colon \mathsf{Cycle}_n \to \Gamma$ のことをいう．言い換えると，Γ

内の長さ n のサイクルとは Γ 内の長さ n のパス $\pi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ であって $t(y_n) = s(y_1)$ をみたすものである．
グラフ準同型写像として単射なパス，閉路をそれぞれ**単純パス** (simple path)，**単純閉路** (simple cycle) と呼ぶ．グラフ準同型写像として単射な片側無限パス，両側無限パスをそれぞれ**光線** (ray)，**両側光線** (double ray) と呼ぶことがある．
グラフ Γ 内の長さ n のパス $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ における**逆行** (backtrack) とは，連続する辺の組 (y_i, y_{i+1}) で $y_{i+1} = \bar{y}_i$ となっているものをいう．逆行を持たないパスを**逆行なしの** (without backtracking) パスという．単純パスには定義から逆行がない (逆行があれば同じ頂点を 2 度通るため)．

注意 6.18 (用語についての注意).　定義 6.17 におけるパス，閉路，単純パス，単純閉路という用語はグラフ理論においては専らそれぞれ**歩道** (walk)，**閉歩道** (closed walk)，パス，閉路と呼ばれることが多い (例えば [Die17] など) ので注意が必要である．また，定義 6.17 における単純閉路は [Ser80] では**回路** (circuit) と呼ばれている．

例 6.19.　グラフ

$\Gamma =$ 

において，

- $\pi_1 := (y_1, y_4, \bar{y}_4)$ は P と Q を結ぶ長さ 3 のパスである．しかし単純パスでも閉路でもなく，逆行 $(y_4, \bar{y}_4)$ を持つ．
- $\pi_2 := (y_1, y_4, y_5, \bar{y}_3)$ は長さ 4 の閉路である．しかし R を二度通るため単純閉路ではない．
- $\pi_3 := (y_1, \bar{y}_2)$ は長さ 2 の単純閉路である．しかし閉路なので単純パスではない．
- $\pi_4 := (\bar{y}_5)$ は長さ 1 の単純閉路である．これもやはり閉路なので単純パスではない．
- $\pi_5 := (y_1, \bar{y}_1)$ は逆行を持つ閉路だが単純閉路ではない．実際，π_5 をグラフ準同型写像 $f\colon \mathsf{Cycle}_2 \to \Gamma$ とすると，$\mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_2) = \{(0,1), (1,0), \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}\}$ について $f((0,1)) = y_1, f((1,0)) = \bar{y}_1$ だから $f(\overline{(0,1)}) = \overline{f((0,1))} = \bar{y}_1 = f((1,0))$ となるので f は単射でない．

定義 6.20 (パスの合成).　Γ をグラフとし，$f\colon \mathsf{Path}_m \to \Gamma, g\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ を Γ 内のパスであって $f(m) = g(0)$ をみたすものとする．このとき f と g の**合成** (composition) $f \cdot g\colon \mathsf{Path}_{m+n} \to \Gamma$ を，

$$(f \cdot g)(i) := \begin{cases} f(i) & (0 \le i \le m \text{ のとき}), \\ g(i-m) & (m \le i \le m+n \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$(f \cdot g)((i, i+1)) := \begin{cases} f((i, i+1)) & (0 \le i < m \text{ のとき}), \\ g((i-m, i-m+1)) & (m \le i < m+n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．パスの合成は結合律 $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ をみたす (証明は略)．よって複数のパスの合成を括弧を書かずに $f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_k$ と書くことができる．パスの合成 $f \cdot g$ を省略して単に fg と書くこともある．
グラフ Γ の各辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ を長さ 1 のパス (y) と同一視することで，Γ 内の任意のパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ は

$$f = f((0,1)) \cdot f((1,2)) \cdot \cdots \cdot f((n-1, n))$$

と書ける．

次に，パスの言葉を用いて連結性の定義をする．連結成分とはグラフの「ひとつながりの」部分であり，連結なグラ

フとは連結成分をちょうど一つだけ持つようなグラフである．

定義 6.21 (連結成分，連結グラフ).　Γ をグラフとする．$\mathrm{V}(\Gamma)$ 上の二項関係 $\sim$ を，2 頂点 $P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma)$ に対し

$$P \sim Q \;:\Longleftrightarrow\; P \text{ と } Q \text{ を結ぶ } \Gamma \text{ 内のパスが存在する}$$

と定義する．容易にわかるように，$\sim$ は $\mathrm{V}(\Gamma)$ 上の同値関係である (推移律を証明する際にパスの合成を用いる)．$\sim$ による同値類 $S \subseteq \mathrm{V}(\Gamma)$ によって誘導される誘導部分グラフ $\Gamma[S] \subseteq \Gamma$ を Γ の**連結成分** (connected component) と呼ぶ．Γ は連結成分によって分割される．すなわち，どの頂点と辺もただ一つの連結成分に属す．
連結成分をちょうど一つだけ持つようなグラフは**連結である** (connected) といい，そうでないグラフは**非連結である** (disconnected) という．特に，空なグラフ (すなわち，頂点集合と辺集合がともに空集合 $\emptyset$ であるようなグラフ) は非連結である．

例 6.22.　$n \in \mathbb{N}$ に対し，グラフ Γ_n を $\mathrm{V}(\Gamma_n) := \{1, 2, \dots, n\}, \mathrm{E}(\Gamma_n) := \emptyset$ で定義する．このとき，Γ_n が連結であることと $n = 1$ は同値である．

補題 6.23.　Γ をグラフとし，$f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ を長さ $n \geq 1$ のパスとする．頂点の部分集合 $S \subseteq \mathrm{V}(\Gamma)$ について $f(0) \in S \not\ni f(n)$ が成り立つならば，ある辺 $y \in \mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)$ があって $s(f(y)) \in S \not\ni t(f(y))$ をみたす．

証明．仮定 $f(0) \in S \not\ni f(n)$ より，$0 \leq i < n$ をみたすある i について $f(i) \in S \not\ni f(i+1)$ が成り立たなければならない．実際，もしそのような i がないとすると，i に関する帰納法ですべての $i \in \mathrm{V}(\mathsf{Path}_n)$ について $f(i) \in S$ が成り立ってしまい，仮定 $f(n) \notin S$ に反する (図 6.1)．よって $y := (i, i+1) \in \mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)$ とおけばよい．　□

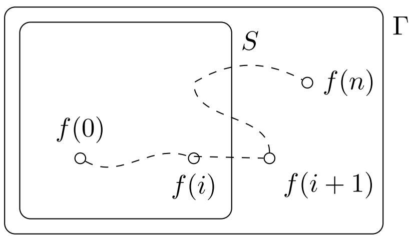


図 6.1　S の「境界」に位置する辺の構成

系 6.24.　Γ を連結グラフとし，$S \subseteq \mathrm{V}(\Gamma)$ を部分集合であって $\emptyset \subsetneq S \subsetneq \mathrm{V}(\Gamma)$ をみたすものとする．このときある辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ があって $s(y) \in S \not\ni t(y)$ をみたす．

証明．$S \neq \emptyset$ より頂点 $P \in S$ がとれ，また $S \subsetneq \mathrm{V}(\Gamma)$ より頂点 $Q \in \mathrm{V}(\Gamma) - S$ がとれる．Γ が連結であることより P と Q を結ぶパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ がとれる．このとき $f(0) = P \in S \not\ni Q = f(n)$ だから補題 6.23 より辺 $y \in \mathrm{E}(\mathsf{Path}_n)$ であって $s(f(y)) \in S \not\ni t(f(y))$ をみたすものがとれる．この $f(y) \in \mathrm{E}(\Gamma)$ が所望の辺である．　□

系 6.25.　Γ_1 を空でないグラフ，Γ_2 を連結グラフとし，$f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ をグラフ準同型写像とする．f がグラフ準同型写像として全射でないならば，ある辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma_2)$ が存在して $s(f(y)) \in \mathrm{V}(\mathrm{Im}(f)) \not\ni t(f(y))$ をみたす．特に，辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\Gamma_1) \to \mathrm{E}(\Gamma_2)$ は全射でない．
言い換えると，連結グラフ Γ_2 へのグラフ準同型 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ について

$$f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2 \text{ が全射} \iff f\colon \mathrm{E}(\Gamma_1) \to \mathrm{E}(\Gamma_2) \text{ が全射.}$$

証明. f がグラフ準同型写像として全射でないことより，頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\Gamma_1) \to \mathrm{V}(\Gamma_2)$ と辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\Gamma_1) \to \mathrm{E}(\Gamma_2)$ のうち少なくとも一方は全射でない．ここで頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\Gamma_1) \to \mathrm{V}(\Gamma_2)$ が全射でないとすると，Γ_1 が空でないことと合わせて $\emptyset \subsetneq \mathrm{V}(\mathrm{Im}(f)) \subsetneq \mathrm{V}(\Gamma)$ を得る．Γ_2 は連結グラフだから系 6.24 より，ある辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma_2)$ で $s(y) \in \mathrm{V}(\mathrm{Im}(f)) \not\ni t(y)$ をみたすものがとれる．ここで仮に辺 $y' \in \mathrm{E}(\Gamma_1)$ で $f(y') = y$ をみたすものがとれたとすると，$f(t(y')) = t(f(y')) = t(y) \notin \mathrm{V}(\mathrm{Im}(f))$ となり矛盾が生じる．よって辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\Gamma_1) \to \mathrm{E}(\Gamma_2)$ は全射でない． □

例 6.26. 例 6.22 のグラフ Γ_n を考え，$m < n$ なる $m, n \in \mathbb{N}$ についてグラフ準同型写像 $f_{m,n}\colon \Gamma_m \to \Gamma_n$ を $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し $f_{m,n}(i) := i$ で定義する．このとき $f_{m,n}$ はどちらも頂点間の写像が全射でないのでグラフ準同型写像として全射ではないが，辺の間の写像は $(\mathrm{E}(\Gamma_m) = \mathrm{E}(\Gamma_n) = \emptyset$ なので$)$ 全射となる $(m < n$ のとき，$m = 0$ または $n \neq 1$ の少なくとも一方が成り立つことに注意せよ．前者の場合は Γ_0 が空なグラフとなり，後者の場合は Γ_n が連結でないグラフとなる$)$.

6.5 単純グラフ

ここではグラフの中でも単純グラフと呼ばれるグラフのクラスを定義をする．グラフ理論は主として単純グラフを対象とする理論である．単純グラフの「単純」は単純パスや単純閉路の「単純」とは関係がないことに注意する．

定義 6.27 (多重辺，自己ループ). Γ をグラフとする．2 本の相異なる辺 $y_1, y_2 \in \mathrm{E}(\Gamma)$ が $s(y_1) = s(y_2)$ かつ $t(y_1) = t(y_2)$ をみたすとき，y_1, y_2 を**多重辺** (multiple edges) という．辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ が $s(y) = t(y)$ をみたすとき**自己ループ** (self-loop) あるいは単に**ループ** (loop) という．

グラフが多重辺を持つことと長さ 2 の単純閉路を持つことは同値であることに注意する $(y_1, y_2$ が多重辺なら $(y_1, \bar{y}_2)$ は単純閉路であり，逆も同様$)$．自己ループと長さ 1 の閉路は同じものであることに注意する．

定義 6.28 (単純グラフ). グラフ Γ が**単純** (simple, combinatorial) であるとは，Γ が多重辺も自己ループも持たないことをいう．言い換えると，単純グラフとは長さ 2 以下の単純閉路を持たないグラフである．

単純グラフ Γ においては，辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ はその端点 $(s(y), t(y)) \in \mathrm{V}(\Gamma) \times \mathrm{V}(\Gamma)$ と同一視することができる．特に，無向辺 $\{y, \bar{y}\}$ は 2 元集合 $\{s(y), t(y)\}$ と同一視される (自己ループがないので $s(y) \neq t(y)$ であることに注意)．すなわち，単純無向グラフにおいては辺集合は頂点集合 V の 2 元部分集合の集合とみなせるのである．

例 6.29. Path_n $(n \geq 0)$, Cycle_n $(n \geq 3)$, $\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}, \mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ はすべて単純グラフである．$\mathsf{Cycle}_1, \mathsf{Cycle}_2$ は単純グラフではない．

考察の対象を単純グラフに限定すると，パスを頂点の列として定義できる (すなわち，頂点の情報だけからパスが復元できる) など様々な利点があるが，本稿 (特に 7 章と 10 章) では考察の対象を単純グラフに限定せず一般のグラフを考えることにする．

補題 6.30. Γ_1 を単純グラフ，$f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ をグラフ準同型写像とする．f がグラフ準同型写像として単射でないなら頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\Gamma_1) \to \mathrm{V}(\Gamma_2)$ は単射でない．
言い換えると，単純グラフ Γ_1 からのグラフ準同型 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ について

$$f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2 \text{ が単射} \iff f\colon\ \mathrm{V}(\Gamma_1) \to \mathrm{V}(\Gamma_2) \text{ が単射}.$$

証明. f がグラフ準同型写像として単射でないことより，頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\Gamma_1) \to \mathrm{V}(\Gamma_2)$ と辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\Gamma_1) \to \mathrm{E}(\Gamma_2)$ のうち少なくとも一方は単射でない．ここで辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\Gamma_1) \to \mathrm{E}(\Gamma_2)$ が単射でない

とすると，ある $y_1, y_2 \in \mathrm{E}(\Gamma_1)$ について $y_1 \neq y_2$ かつ $f(y_1) = f(y_2)$ が成り立つ．ここでもし $s(y_1) = s(y_2)$ かつ $t(y_1) = t(y_2)$ であるとすると，Γ_1 が単純グラフであることより $y_1 = y_2$ となってしまい矛盾する．よって $s(y_1) \neq s(y_2)$ または $t(y_1) \neq t(y_2)$ の少なくとも一方が成り立つ．$t(y_1) \neq t(y_2)$ のときは $s(\bar{y}_1) = \overline{t(y_1)} \neq \overline{t(y_2)} = s(\bar{y}_2)$ だから $s(y_1) \neq s(y_2)$ と仮定して一般性を失わない．このとき $f(s(y_1)) = s(f(y_1)) = s(f(y_2)) = f(s(y_2))$ となるので $f\colon \mathrm{V}(\Gamma_1) \to \mathrm{V}(\Gamma_2)$ は単射でない． □

例 6.31. 単純グラフでないグラフ Cycle_2 について，グラフ準同型写像 $f\colon \mathsf{Cycle}_2 \to \mathsf{Path}_1$ を $f(0) := 0, f(1) := 1$ で定義すると，辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_2) \to \mathrm{E}(\mathsf{Path}_1)$ は単射でないが，頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\mathsf{Cycle}_2) \to \mathrm{V}(\mathsf{Path}_1)$ は単射になる．

6.6 距離と測地線

測地線とは 2 頂点間を結ぶ「最短経路」のことである．

定義 6.32 (距離と測地線). Γ をグラフとし，$P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma)$ を頂点とする．P と Q を結ぶ Γ 内のパス全体の集合を

$$\Pi(P,Q) := \{\, f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma \mid n \in \mathbb{N}, f \text{ は } P \text{ と } Q \text{ を結ぶパス} \,\}$$

とおく．$\Pi(P,Q) \neq \emptyset$，すなわち P と Q を結ぶパスが存在すると仮定する．このとき

$$d(P,Q) := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid f \in \Pi(P,Q), f \text{ は長さが } n \,\}$$

を P と Q の**距離** (distance) という．さらに，長さが $d(P,Q)$ であるようなパス $f \in \Pi(P,Q)$ を P と Q を結ぶ**測地線** (geodesic) という．

一般には 2 頂点 P, Q を結ぶ測地線は一意とは限らず，いくつものとり方がありえる．

命題 6.33. Γ が連結グラフならば，定義 6.32 の d について (Γ, d) は距離空間の公理をみたす．

証明. Γ が連結であることより任意の 2 点 $P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma)$ 間に対し $d(P,Q) \in \mathbb{N}$ が定義される．よって関数 $d\colon \mathrm{V}(\Gamma) \times \mathrm{V}(\Gamma) \to \mathbb{R}; (P,Q) \mapsto d(P,Q)$ が定義できる．d が距離関数の公理をみたすこと (正定値性，対称性，三角不等式) は，定義 6.21 における $\sim$ が同値関係であることの証明を参考にすればできる． □

補題 6.34. 測地線は単純パスである．

証明. 対偶を示す．グラフ Γ 内の 2 頂点 $P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma)$ を結ぶ, 単純でないパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ $(n \geq 1)$ をとる．Path_n は単純グラフだから補題 6.30 より頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\mathsf{Path}_n) \to \mathrm{V}(\Gamma)$ は単射でない．よって $1 \leq i < j \leq n$ なるある i, j について $f(i) = f(j) \in \mathrm{V}(\Gamma)$ が成り立つ．このとき f に対応する辺の列 $(f((0,1)), f((1,2)), \ldots, f((n-1,n)))$ から $f((i,i+1)), \ldots, f((j-1,j))$ を取り除いてできる辺の列

$$(f((0,1)), f((1,2)), \ldots, f((i-1,i)), f((j,j+1)), f((j+1,j+2)), \ldots, f((n-1,n)))$$

は P と Q を結ぶ f より短いパスである (図 6.2)．よって f は測地線ではない． □

定義 6.35 (等長写像，等長同型). (X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が**等長写像** (isometry) であるとは，すべての点 $x_1, x_2 \in X$ に対し $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ が成り立つことをいう．距離関数の正定値性より，すべての等長写像は単射である．f が**等長同型** (isometric isomorphism) であるとは，f が全単射な

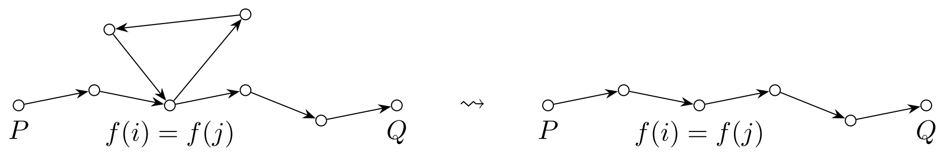


図 6.2　単純でないパスからより短いパスを構成する

等長写像であることをいう．2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) の間に等長同型写像が存在するとき，(X, d_X) と (Y, d_Y) は**等長同型である** (isometric) という．

命題 6.36.　グラフ同型写像 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ は距離空間 (Γ_1, d) と (Γ_2, d) の間の等長同型を与える．

証明．2 頂点 $P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma_1)$ を任意にとる．P と Q を結ぶ Γ_1 内の長さ n の測地線 $g\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma_1$ をとると，合成写像 $f \circ g\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma_2$ は $f(P)$ と $f(Q)$ を結ぶ Γ_2 内の長さ n のパスである．よって $d(f(P), f(Q)) \leq n = d(P, Q)$ が成り立つ．逆写像 $f^{-1}\colon \Gamma_2 \to \Gamma_1$ と 2 頂点 $f(P), f(Q) \in \mathrm{V}(\Gamma_2)$ について同様の議論を行うことにより $d(P, Q) = d(f^{-1}(f(P)), f^{-1}(f(Q))) \leq d(f(P), f(Q))$ がわかり，よって $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ が結論される． □

6.7　木

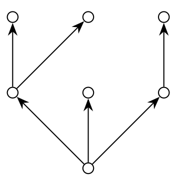
木とは，次で定義されるようなグラフのクラスである．

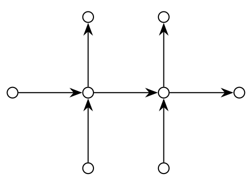
定義 6.37 (木).　単純閉路を持たない連結グラフを**木** (tree) という．

本稿において，木は非常に重要な対象である．木は 7 章で見るように自由群の Cayley グラフとして自然に現れる対象であり，また代数トポロジーの視点からはグラフの普遍被覆空間と思うこともできる．

木は定義から単純グラフである．

例 6.38.　以下の 2 つのグラフはどちらも木である (両方を合わせて 1 つのグラフであるとみなすと非連結になってしまい木にならないことに注意).





また，Path_n $(n \in \mathbb{N})$ や $\mathsf{Path}_\mathbb{N}, \mathsf{Path}_\mathbb{Z}$ はすべて木である．一方，Cycle_n $(n \geq 1)$ はどれも木ではない．

補題 6.39.　グラフが逆行のない閉路を持つならば単純閉路を持つ (特に木ではない).

証明．Γ をグラフとし，$c\colon \mathsf{Cycle}_n \to \Gamma$ $(n \geq 1)$ を逆行のない閉路とする．$S := \{\, j \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid \exists i < j\ [c(i) = c(j)]\,\}$ とおくと，$c(0) = c(n)$ より $S \neq \emptyset$ だから $l := \min S$ が定義できる．このとき l の最小性から $c(k) = c(l)$ となる $k < l$ がただ一つ存在する．辺の列 $(c((k, k+1)), c((k+1, k+2)), \ldots, c((l-1, l)))$ に対応する Γ 内の閉路を $c'\colon \mathsf{Cycle}_{l-k} \to \Gamma$ とおくと，c' は頂点に重複のない，Γ 内の逆行のない閉路を与える．$l - k \geq 3$ ならば Cycle_{l-k} は単純グラフだから，頂点に重複がないことと補題 6.30 より c' は単純閉路である．$l - k = 2$ のときも，逆行がないことから c' は単純閉路でなければならない．$l - k = 1$ のときは明らかに単純閉路である． □

定義 6.40 (部分木，全域木).　グラフ Γ の部分グラフ $T \subseteq \Gamma$ が木であるとき，T を Γ の**部分木** (subtree) という．部分木 $T \subseteq \Gamma$ が $\mathrm{V}(T) = \mathrm{V}(\Gamma)$ をみたすとき，T を Γ の**全域木** (spanning tree) という．

例 6.41.　部分木と全域木の例を見る．

$$\Gamma := \begin{tikzcd} P_{11} \arrow[r, "y_1"] \arrow[d, "y_3"'] & P_{12} \arrow[r, "y_2"] \arrow[d, "y_4"'] & P_{13} \arrow[d, "y_5"'] \\ P_{21} \arrow[r, "y_6"] & P_{22} \arrow[r, "y_7"] & P_{23} \end{tikzcd}, \quad T_0 := \begin{tikzcd} P_{11} \arrow[r, "y_1"] & P_{12} \arrow[r, "y_2"] \arrow[d, "y_4"'] & P_{13} \\ & P_{22} & \end{tikzcd}, \quad T := \begin{tikzcd} P_{11} \arrow[r, "y_1"] \arrow[d, "y_3"'] & P_{12} \arrow[r, "y_2"] \arrow[d, "y_4"'] & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} \arrow[r, "y_7"] & P_{23} \end{tikzcd}$$

とおくと，T_0 は Γ の部分木だが全域木ではない．T は Γ の全域木である．

以下に見るように，連結グラフは必ず全域木を持つことが示せる．実際にはより強く，任意の部分木を全域木に拡大できることが言える．

命題 6.42.　連結グラフ Γ とその部分木 $T_0 \subseteq \Gamma$ に対し，T_0 を部分木として含むような全域木 $T \subseteq \Gamma$ が存在する．

証明. T_0 を含むような Γ の部分木全体の集合を $\mathcal{T}$ とおく．$T_0 \in \mathcal{T}$ だから $\mathcal{T} \neq \emptyset$ である．$\mathcal{T}$ は包含関係 (部分グラフであるという関係) によって順序集合をなすことが容易にわかる．$\mathcal{T}$ が帰納的順序集合をなす (すなわち，どの全順序部分集合も上界を持つ) ことを示す．全順序部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ を任意にとる．$\mathcal{C} = \emptyset$ のときは $T_0 \in \mathcal{T}$ が上界なので $\mathcal{C} \neq \emptyset$ とする．和 $T^* := \bigcup \mathcal{C} \subseteq \Gamma$ が再び部分木になること，すなわち連結かつ単純閉路を持たないことを示す．
2 頂点 $P, Q \in \mathrm{V}(T^*)$ を任意にとると，T^* の定義よりある部分木 $T_P, T_Q \in \mathcal{C}$ について $P \in \mathrm{V}(T_P), Q \in \mathrm{V}(T_Q)$ が成り立つ．$\mathcal{C}$ の全順序性より $T_P \subseteq T_Q$ または $T_Q \subseteq T_P$ が成り立つ．よって $T_M := \max\{T_P, T_Q\}$ がとれる．このとき $P, Q \in \mathrm{V}(T_M)$ となり，$T_M \in \mathcal{T}$ より T_M は木だから P と Q を結ぶ T_M 内のパス f が存在する．$T_M \subseteq T^*$ だから f は P と Q を結ぶ T^* 内のパスでもある．よって T^* は連結である ($\mathcal{C} \neq \emptyset$ としていたことに注意)．
次に，T^* がある単純閉路 $f\colon \mathsf{Cycle}_n \to T^*$ $(n \geq 1)$ を持つと仮定する．$\mathrm{Im}(f) \subseteq T^*$ は有限部分グラフだから，ある有限個の部分木 $T_1, T_2, \ldots, T_k \in \mathcal{C}$ があって $\mathrm{Im}(f) \subseteq T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k \subseteq T^*$ が成り立つ．ここで $\mathcal{C}$ の全順序性より $T_M := \max\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ がとれる．このとき $\mathrm{Im}(f) \subseteq T_M \in \mathcal{C}$ より T_M は単純閉路 f を持つことになり，T_M が木であることに矛盾する．よって T^* は木である．
以上により $\mathcal{T}$ は帰納的順序集合だから，Zorn の補題により $\mathcal{T}$ は極大元 T を持つ．T が全域木であることを示す．仮に $\mathrm{V}(T) \subsetneq \mathrm{V}(\Gamma)$ とすると，T の連結性と合わせて $\emptyset \subsetneq \mathrm{V}(T) \subsetneq \mathrm{V}(\Gamma)$ を得る．Γ は連結グラフだから系 6.24 より，ある辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ で $s(y) \in \mathrm{V}(T) \not\ni t(y)$ をみたすものがとれる．このとき，T に頂点 $t(y) \in \mathrm{V}(\Gamma)$ と辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ を付け加えたグラフを T' とすると T' は T を真に含む Γ の部分木であり (y を含む単純閉路は発生しえないことに注意する)，これは T の極大性に反する．よって T は Γ の全域木でなければならない．　□

補題 6.43.　木 T の 2 頂点 $P, Q \in \mathrm{V}(T)$ に対し，P と Q を結ぶ逆行のないパスは単純パスである．

証明. 対偶を示す．P と Q を結ぶパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to T$ であって単純パスでないものをとる．Path_n は単純グラフだから補題 6.30 より $f\colon \mathrm{V}(\mathsf{Path}_n) \to \mathrm{V}(T)$ は単射でない．よって集合 $I := \{\, (i, j) \mid 0 \leq i < j \leq n, f(i) = f(j) \,\}$ は空でない．$j - i$ が最小であるような組 $(i, j) \in I$ を一つとり固定する．I の定義より，閉路 $c\colon \mathsf{Cycle}_{j-i} \to T$ が $k \in \mathbb{Z}/(j-i)\mathbb{Z}$ に対し $c(k) := f(i+k) \in \mathrm{V}(T), c((k, k+1)) := f((i+k, i+k+1)) \in \mathrm{E}(T)$ とおくことによって定まる．T が木であることより c は単純閉路ではない．ところが $j-i$ の最小性より頂点 $c(0), c(1), \ldots, c(j-i-1)$ はすべて異なるため，頂点間の写像 $c\colon \mathrm{V}(\mathsf{Cycle}_{j-i}) \to \mathrm{V}(T)$ は単射である．よって辺の間の写像 $c\colon \mathrm{E}(\mathsf{Cycle}_{j-i}) \to \mathrm{E}(T)$ が単射でないことになるが，これは頂点に重複がないことから $j - i = 2$ かつ $c((1, 0)) = c(\overline{(0, 1)})$ の場合しかあり

えない ($j-i=1$ の場合も c が単射になってしまうのでありえない)．よって $f((i+1,j))=c((1,0))=c(\overline{(0,1)})=\overline{c((0,1))}=\overline{f((i,i+1))}$ となり，f が逆行を持つことがわかる． □

系 6.44. 木 T の 2 頂点 $P,Q\in \mathrm{V}(T)$ に対し，P と Q を結ぶ T 内の逆行のないパスはただ一つ存在し，それは P と Q を結ぶ測地線である．

証明． T は連結だから P と Q を結ぶ測地線がとれ，これは補題 6.34 より単純パスだから特に逆行がない．よって P と Q を結ぶ逆行のないパスの一意性を示せば証明が終わる．$d(P,Q)$ に関する帰納法で示す．より正確には，いかなる $d\in\mathbb{N}$ と $P,Q\in \mathrm{V}(T)$ に対しても，「$d(P,Q)\leq d$ ならば P と Q を結ぶ逆行のないパスは一意である」ことを，d に関する帰納法で示す．

($d=0$ のとき) $f\colon \mathsf{Path}_n\to T$ を P から Q への T 内の逆行のないパスとする．仮に $n\neq 0$ とすると補題 6.43 より f は単純パスだから $P=f(0)\neq f(n)=Q$ でなければならないが，これは $d(P,Q)=0$ に反する．よって f は唯一の測地線 $f\colon \mathsf{Path}_0\to T$ である．

($d>0$ のとき) T の辺の列 $\pi_1=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ $(m>0)$ と $\pi_2=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ $(n>0)$ を P から Q への T 内の逆行のないパスとする．ここで仮に $y_m\neq z_n$ であるとすると，パス $\pi:=(y_1,y_2,\ldots,y_m,\bar{z}_n,\ldots,\bar{z}_2,\bar{z}_1)$ は逆行を持たないので，補題 6.43 より π は単純パスとなるはずである．ところがこれは π の始点 $s(y_1)=P$ と終点 $t(\bar{z}_1)=s(z_1)=P$ が等しいことに反する．よって $y_m=z_n$ でなければならないので，パス $\pi_1':=(y_1,y_2,\ldots,y_{m-1})$ と $\pi_2':=(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})$ は P と $s(y_m)=s(z_n)$ を結ぶ逆行のないパスとなる．よって帰納法の仮定より $\pi_1'=\pi_2'$ を得，$\pi_1=\pi_2$ がわかる． □

定義 6.45. 木 T の 2 頂点 $P,Q\in \mathrm{V}(T)$ に対し，系 6.44 よりただ一つ存在する，P と Q を結ぶ T 内の測地線を $T[P,Q]$，または単に $[P,Q]$ と書く．

補題 6.46. T が有限グラフかつ木であるとき，

$$|\mathrm{V}(T)|=\frac{|\mathrm{E}(T)|}{2}+1$$

が成り立つ (ここで $|\mathrm{E}(T)|/2$ は T の無向辺の本数であることに注意)．

証明． 頂点数 $|\mathrm{V}(T)|$ に関する帰納法で示す．T は木ゆえ連結だから特に空ではないので $|\mathrm{V}(T)|\neq 0$ である．$|\mathrm{V}(T)|=1$ のとき，T は自己ループを持たないので $\mathrm{E}(T)=\emptyset$ となる．次に，$|\mathrm{V}(T)|\geq 2$ とする．

主張 6.47. T は $\deg(P)=1$ なる頂点 $P\in \mathrm{V}(T)$ を持つ．

証明． いま $|\mathrm{V}(T)|\geq 2$ だから，T が連結であることから T に次数 0 の頂点は存在しない．よって T のすべての頂点は次数が 1 以上である．ここで仮に T のすべての頂点の次数が 2 以上であるとする．頂点 $P_0\in \mathrm{V}(T)$ を任意にとり固定する．いま $\deg(P_0)\geq 1$ だから，P_0 を始点とする辺 $y_1\in \mathrm{E}(T)$ とその終点 $P_1:=t(y_1)\in \mathrm{V}(T)$ がとれる．同様に，仮定から $\deg(P_1)\geq 2$ だから，P_1 を始点とする $\bar{y}_1$ 以外の辺 $y_2\in \mathrm{E}(T)$ とその終点 $P_2:=t(y_2)\in \mathrm{E}(T)$ がとれる．これを繰り返すことで，T 内のいくらでも長いパス $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ が構成できる．作り方からこれらのパスは逆行がないので，補題 6.43 より単純パスとなるはずだが，これは T が有限グラフであることに矛盾する． □

このとき T から P と，P に接続している唯一の辺 y とその反転 $\bar{y}$ を除いてできる部分グラフ $T_0\subseteq T$ は木だから，帰納法の仮定より $|\mathrm{V}(T_0)|=|\mathrm{E}(T_0)|/2+1$ が成り立つ．よって $|\mathrm{V}(T)|=|\mathrm{V}(T_0)|+1=|\mathrm{E}(T_0)|/2+2=|\mathrm{E}(T)|/2+1$

となる． □

最後に，局所的に単射なグラフ準同型写像を導入して本小節を終える．

定義 6.48 (局所的に単射). グラフ準同型写像 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が**局所的に単射である** (locally injective) とは，f が

$$\forall y_1, y_2 \in \mathrm{E}(\Gamma_1)\ [s(y_1) = s(y_2) \wedge f(y_1) = f(y_2) \implies y_1 = y_2]$$

をみたすことをいう．単射なグラフ準同型写像は局所的に単射である．

以下は代数トポロジーにおける「木 (1 次元複体) の普遍被覆空間はそれ自身である」という性質の組合せ論的な類似である．

命題 6.49 ([Ser80, Chapter I, §4.5, Lemma 5]). Γ を連結グラフ，T を木，$f\colon \Gamma \to T$ を全射かつ局所的に単射なグラフ準同型写像とする．このとき f は同型写像である．

証明． f が単射であることを示せば十分である．仮に f が単射でないとすると，$f\colon \mathrm{V}(\Gamma) \to \mathrm{V}(T)$ と $f\colon \mathrm{E}(\Gamma) \to \mathrm{E}(T)$ のうち少なくとも一方が単射でない．$f\colon \mathrm{E}(\Gamma) \to \mathrm{E}(T)$ が単射でないとすると，ある $y_1, y_2 \in \mathrm{E}(\Gamma)$ について $y_1 \neq y_2$ かつ $f(y_1) = f(y_2)$ が成り立つが，f が局所的に単射であることより $s(y_1) \neq s(y_2)$ でなければならない．よって $s(y_1) \neq s(y_2)$ かつ $f(s(y_1)) = s(f(y_1)) = s(f(y_2)) = f(s(y_2))$ となるので，いずれにせよ $f\colon \mathrm{V}(\Gamma) \to \mathrm{V}(T)$ が単射でない．2 頂点 $P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma)$ で $P \neq Q$ かつ $f(P) = f(Q) \in \mathrm{V}(T)$ となるものをとる．Γ が連結であることより，P と Q を結ぶある測地線 $g\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ がとれる．補題 6.34 より g は単純パスだから特に逆行がない．

主張 6.50. 局所的に単射なグラフ準同型写像 $f\colon \Gamma \to T$ は逆行のないパス $g\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ を逆行のないパス $f \circ g\colon \mathsf{Path}_n \to T$ に写す．

証明． $f \circ g$ が逆行を持つならば g が逆行を持つことを示す．g に対応する Γ の辺の列 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ をとる．このとき $f \circ g$ に対応する T の辺の列 $(f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n))$ が逆行を持つことより，ある i について $f(y_{i+1}) = \overline{f(y_i)}$ が成り立つ．よって $f(\bar{y}_i) = \overline{f(y_i)} = f(y_{i+1})$ が成り立つ．また，$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ がパスであることより $s(y_{i+1}) = t(y_i) = s(\bar{y}_i)$ が成り立つ．したがって f が局所的に単射であることより $\bar{y}_i = y_{i+1}$ となり，g は逆行を持つ． □

よって $f \circ g$ は T 内の逆行のないパスだから，補題 6.43 より単純パスである．これは $(f \circ g)(0) = f(P) = f(Q) = (f \circ g)(n)$ であったことに矛盾する．よって f は単射でなければならない． □

6.8 グラフの自己同型写像と商グラフ

ここではグラフへの群の作用と，その作用による商グラフを導入する．

定義 6.51 (自己同型写像，反転なし，自由な作用). Γ をグラフとするとき，同型写像 $f\colon \Gamma \to \Gamma$ を Γ 上の**自己同型写像** (automorphism) という．Γ 上の自己同型写像の全体が合成に関してなす群を $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ で表し，**自己同型群**という．自己同型写像 $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ が**反転なし** (without inversion) であるとは，すべての辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ に対し $f(y) \neq \bar{y}$ となることをいう．

群 G のグラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ への作用 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ があるとする．このとき G は頂点集合 V と辺集合 E のそれぞれに作用することに注意する．作用 α が自由であるとは，G の頂点集合 V への作用と辺集合 E への作用がともに自由であることをいう．作用 α が反転なしであるとは，どの元 $g \in G$ に対しても $\alpha(g) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ が反転なしであることをいう．

一般には 2 つの反転なしの自己同型写像の合成が反転なしであるとは限らない．トポロジーの観点からは，$f(y) = \bar{y}$ という条件はグラフ Γ を 1 次元単体複体とみなしたときに「単体写像 f が 1 次元単体 y の中点を固定する」という条件に対応する．

ある群がグラフに反転なしで作用しているとき，その商が次のようにして定義できる．

命題 6.52 (商グラフ).　群 G がグラフ $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ に反転なしで作用しているとする．このとき，商グラフ $G\backslash\Gamma$ を $\mathrm{V}(G\backslash\Gamma) := G\backslash V, \mathrm{E}(G\backslash\Gamma) := G\backslash E$ によって定義することができる．さらに，Γ から商グラフ $G\backslash\Gamma$ への自然な商写像 $p\colon \Gamma \to G\backslash\Gamma$ を各頂点 $P \in \mathrm{V}(\Gamma)$ と各辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ に対し $p(P) := \mathrm{Orb}_G(P), p(y) := \mathrm{Orb}_G(y)$ によって定めると，これは全射なグラフ準同型写像である．

証明. G の Γ への作用を $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ とし，$V_* := G\backslash V, E_* := G\backslash E$ とおく．3 つの関数 $s_*\colon E_* \to V_*, t_*\colon E_* \to V_*, \bar{\cdot}^*\colon E_* \to E_*$ を，それぞれ $y \in E$ に対し

$$s_*(\mathrm{Orb}_G(y)) := \mathrm{Orb}_G(s(y)), \qquad t_*(\mathrm{Orb}_G(y)) := \mathrm{Orb}_G(t(y)), \qquad \overline{\mathrm{Orb}_G(y)}^* := \mathrm{Orb}_G(\bar{y})$$

と定義する．これらが well-defined であることを示す．辺 $y, y' \in E$ について $\mathrm{Orb}_G(y) = \mathrm{Orb}_G(y')$ であるとすると，ある $g \in G$ について $y' = \alpha(g)(y)$ と書ける．このとき

- $s(y') = s(\alpha(g)(y)) = \alpha(g)(s(y))$ より $s_*(\mathrm{Orb}_G(y')) = \mathrm{Orb}_G(s(y')) = \mathrm{Orb}_G(s(y)) = s_*(\mathrm{Orb}_G(y))$,
- $t(y') = t(\alpha(g)(y)) = \alpha(g)(t(y))$ より $t_*(\mathrm{Orb}_G(y')) = \mathrm{Orb}_G(t(y')) = \mathrm{Orb}_G(t(y)) = t_*(\mathrm{Orb}_G(y))$,
- $\overline{y'} = \overline{\alpha(g)(y)} = \alpha(g)(\bar{y})$ より $\overline{\mathrm{Orb}_G(y')}^* = \mathrm{Orb}_G(\overline{y'}) = \mathrm{Orb}_G(\bar{y}) = \overline{\mathrm{Orb}_G(y)}^*$

となる．次に，$\bar{\cdot}^*$ が定義 6.1 の条件 (5).(i)–(iv) をみたしていることを見る．

(i) 仮に $\overline{\mathrm{Orb}_G(y)}^* = \mathrm{Orb}_G(y)$ とすると，$\mathrm{Orb}_G(\bar{y}) = \mathrm{Orb}_G(y)$ よりある $g \in G$ があって $\alpha(g)(y) = \bar{y}$ となるはずだが，これは α が反転なしであることに反する (この証明の中で反転なしの仮定を使っているのはここだけである).

(ii) $\overline{\overline{\mathrm{Orb}_G(y)}^*}^* = \overline{\mathrm{Orb}_G(\bar{y})}^* = \mathrm{Orb}_G(\bar{\bar{y}}) = \mathrm{Orb}_G(y)$.

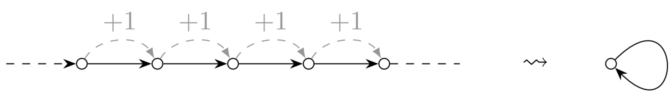
(iii) $s_*(\overline{\mathrm{Orb}_G(y)}^*) = s_*(\mathrm{Orb}_G(\bar{y})) = \mathrm{Orb}_G(s(\bar{y})) = \mathrm{Orb}_G(t(y)) = t_*(\mathrm{Orb}_G(y))$.

(iv) $t_*(\overline{\mathrm{Orb}_G(y)}^*) = t_*(\mathrm{Orb}_G(\bar{y})) = \mathrm{Orb}_G(t(\bar{y})) = \mathrm{Orb}_G(s(y)) = s_*(\mathrm{Orb}_G(y))$.

最後に，$p\colon \Gamma \to G\backslash\Gamma$ は明らかに全射であり，グラフ準同型写像であることは $s_*, t_*, \bar{\cdot}^*$ の定義から直ちにわかる．　□

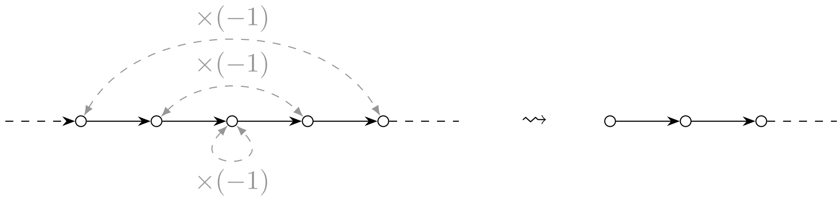
例 6.53.　商グラフの例をいくつか見る．

- $\mathbb{Z}$ の $\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ への作用を，$k \in \mathbb{Z}, n \in \mathrm{V}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}})$ に対し $k \cdot n := n + k$ で定義する ($\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ が単純グラフであることより，頂点への作用を定めれば辺への作用が自然に定まることに注意する)．このとき，商グラフ $\mathbb{Z}\backslash\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ は Cycle_1 に同型である．



- $\{\pm 1\}$ の $\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ への作用を $s \in \{\pm 1\}, n \in \mathrm{V}(\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}})$ に対し $s \cdot n := sn$ で定義する．このとき，商グラフ

$\{\pm 1\}\backslash\mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$ は $\mathsf{Path}_{\mathbb{N}}$ に同型である．



補題 6.54. G を群，Γ をグラフ，$\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ を反転なしの作用とする．このとき Γ のある向き $E_+ \subseteq \mathrm{E}(\Gamma)$ であって α で保たれるもの，すなわち $\forall g \in G\ \forall y \in \mathrm{E}(\Gamma)\ [y \in E_+ \iff \alpha(g)(y) \in E_+]$ をみたすものが存在する．

証明． 命題 6.52 より商グラフ $G\backslash\Gamma$ と商写像 $p\colon \Gamma \twoheadrightarrow G\backslash\Gamma$ がとれる．$G\backslash\Gamma$ の向き $(E_*)_+ \subseteq \mathrm{E}(G\backslash\Gamma)$ をひとつとる．辺の間の写像 $p\colon \mathrm{E}(\Gamma) \twoheadrightarrow \mathrm{E}(G\backslash\Gamma)$ を用いて $E_+ := p^{-1}((E_*)_+) \subseteq \mathrm{E}(\Gamma)$ とおく．このとき各辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ に対し

$$y \in E_+ \iff p(y) \in (E_*)_+ \iff \overline{p(y)} \notin (E_*)_+ \iff p(\bar{y}) \notin (E_*)_+ \iff \bar{y} \notin E_+$$

となるから E_+ は Γ の向きであり，さらに

$$\begin{aligned}\alpha(g)(y) \in E_+ &\iff p(\alpha(g)(y)) \in (E_*)_+ \iff \mathrm{Orb}_G(\alpha(g)(y)) \in (E_*)_+ \\ &\iff \mathrm{Orb}_G(y) \in (E_*)_+ \iff p(y) \in (E_*)_+ \iff y \in E_+\end{aligned}$$

となるので α で保たれる． □

第 7 章

群とグラフ

本章では群の Cayley グラフと呼ばれる概念を用いて群を可視化する手法について解説する．Cayley グラフは群の「かたち」をある程度反映した幾何学的対象であり，本章以降では主に Cayley グラフを念頭に置いて議論を進めていく．本章の後半では自由群の部分群は自由群であるという Nielsen–Schreier の定理 (系 7.28) を示す．本章の内容は [Ser80] の Chapter I, §3 に依るところが大きい．

7.1 Cayley グラフ

7.1.1 定義と例，基本性質

群の Cayley グラフは次のように定義される (ラベル付き) グラフである．

定義 7.1 (Cayley グラフ). G を群，$S \subseteq G$ を部分集合とする．G の S に関する **Cayley グラフ** (Cayley graph) $\mathrm{Cay}(G,S)$ は次のように定義されるグラフである．

- $\mathrm{V}(\mathrm{Cay}(G,S)) := G$,
- $\mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S)) := (G \times S) \sqcup \overline{G \times S}$，ただし $\overline{G \times S} := \{\, \overline{(g,a)} \mid (g,a) \in G \times S \,\}$,
- $s((g,a)) = g$，$s(\overline{(g,a)}) = ga$,
- $t((g,a)) = ga$，$t(\overline{(g,a)}) = g$,
- $\overline{\overline{(g,a)}} = (g,a)$.

各辺 $(g,a) \in G \times S$ には $a \in S$ という**ラベル** (label) が付いているとみなす．また，各辺 $\overline{(g,a)} \in \overline{G \times S}$ には $a^{-1} \in S^{-1}$ というラベルが付いているとみなす．辺に対しそのラベルを返す関数を $\ell\colon \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to S^{\pm 1}$ と書く (ここで $S^{\pm 1} = S \cup S^{-1}$).

Cayley グラフを考える際には，部分集合 $S \subseteq G$ を G の生成系とする場合がほとんどである．また Cayley グラフを図示する際には，辺に (その辺自身の名前ではなく) ラベルを付記することが多い．

グラフ理論においては，単純グラフを扱うことが多い．文献によっては次の単純化された Cayley グラフを Cayley グラフの定義としていることもある．

定義 7.2 (単純化 Cayley グラフ). G を群，$S \subseteq G$ を部分集合とする．G の S に関する**単純化 Cayley グラフ** (simplified Cayley graph)[1] $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ は次のように定義されるグラフである．

- $\mathrm{V}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)) := G$,
- $\mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)) := \{\, (g,a,ga) \mid g \in G, a \in S^{\pm 1} - \{1_G\} \,\}$,

- $s((g,a,ga)) = g$,
- $t((g,a,ga)) = ga$,
- $\overline{(g,a,ga)} = (ga, a^{-1}, g)$.

各辺 $(g,a,ga) \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$ には $a \in S^{\pm 1} - \{1_G\}$ というラベルが付いているとみなす．辺に対しそのラベルを返す関数を $\ell \colon \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)) \to S^{\pm 1} - \{1_G\}$ と書く．

補題 7.3.　群 G と部分集合 $S \subseteq G$ に対し，単純化 Cayley グラフ $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ は実際に単純グラフである．

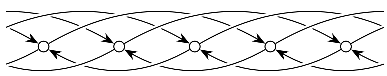
証明． $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ が自己ループを持つとするとある辺 $y = (g,a,ga) \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$ が $ga = t(y) = s(y) = g$ をみたすので $a = 1_G$ となるがこれは $a \in S^{\pm 1} - \{1_G\}$ に反する．次に $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ が多重辺を持つとすると，相異なるある 2 辺 $y_1 = (g_1, a_1, g_1 a_1), y_2 = (g_2, a_2, g_2 a_2) \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$ が $g_1 = s(y_1) = s(y_2) = g_2, g_1 a_1 = t(y_1) = t(y_2) = g_2 a_2$ をみたすので $a_1 = a_2$ となるが，このとき $y_1 = (g_1, a_1, g_1 a_1) = (g_2, a_2, g_2 a_2) = y_2$ となり，$y_1 \neq y_2$ だったことに反する． □

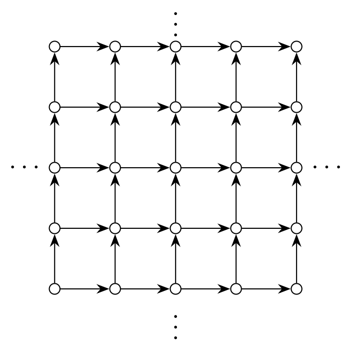
単純化 Cayley グラフを考えるとグラフ理論における種々の定義や定理をそのまま適用できて便利であるが，一方で商や頂点の次数に関する振る舞いは悪くなってしまう．そこで本稿では定義 7.1 を Cayley グラフの正式な定義としておき，定義 7.2 の定義はあまり用いないことにする．

例 7.4.　Cayley グラフの例をたくさん見てみよう．

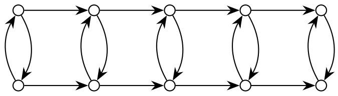
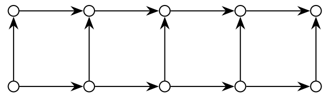
- 自明群 $G = \{1_G\} \cong \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ に対し，$\mathrm{Cay}(G,\emptyset) = \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,\emptyset) = \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,\{1_G\}) = \underset{1_G}{\circ}$ である．一方，

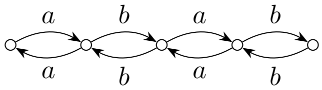
  $\mathrm{Cay}(G,\{1_G\}) = $ $\begin{tikzcd} 1_G \circ \arrow[loop right, "1_G"] \end{tikzcd}$ $\cong \mathsf{Cycle}_1$.

- $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{1\}) = $ $\begin{tikzcd} 0 \circ \arrow[r, bend left, "1"] & \circ\, 1 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$ $\cong \mathsf{Cycle}_2$ だが，$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{1\}) = 0 \circ \xrightarrow{1} \circ\, 1 \cong \mathsf{Path}_1$ である．
- $n \geq 3$ に対し，$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\{1\}) \cong \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\{1\}) \cong \mathsf{Cycle}_n$ である．
- $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{1\}) \cong \mathsf{Path}_{\mathbb{Z}}$.
- $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{3,-2\}) = \cdots$  $\cdots$
- $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^2,\{(1,0),(0,1)\}) \cong \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathbb{Z}^2,\{(1,0),(0,1)\})$ は以下のようなグラフである．

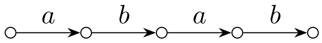


[1] 単純化 Cayley グラフという用語や，$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ という記号は本稿だけのものである．

- $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{(1,0),(0,1)\}) = \cdots$  $\cdots$ である．
- $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{(1,0),(0,1)\}) = \cdots$  $\cdots$ である．
- 無限二面体群 $D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle\, a, b \mid a^2, b^2 \,\rangle$ について，

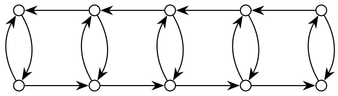
$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{a,b\}) = \cdots$ 

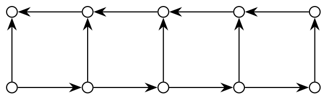
$\cdots,$

$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{a,b\}) = \cdots$ 

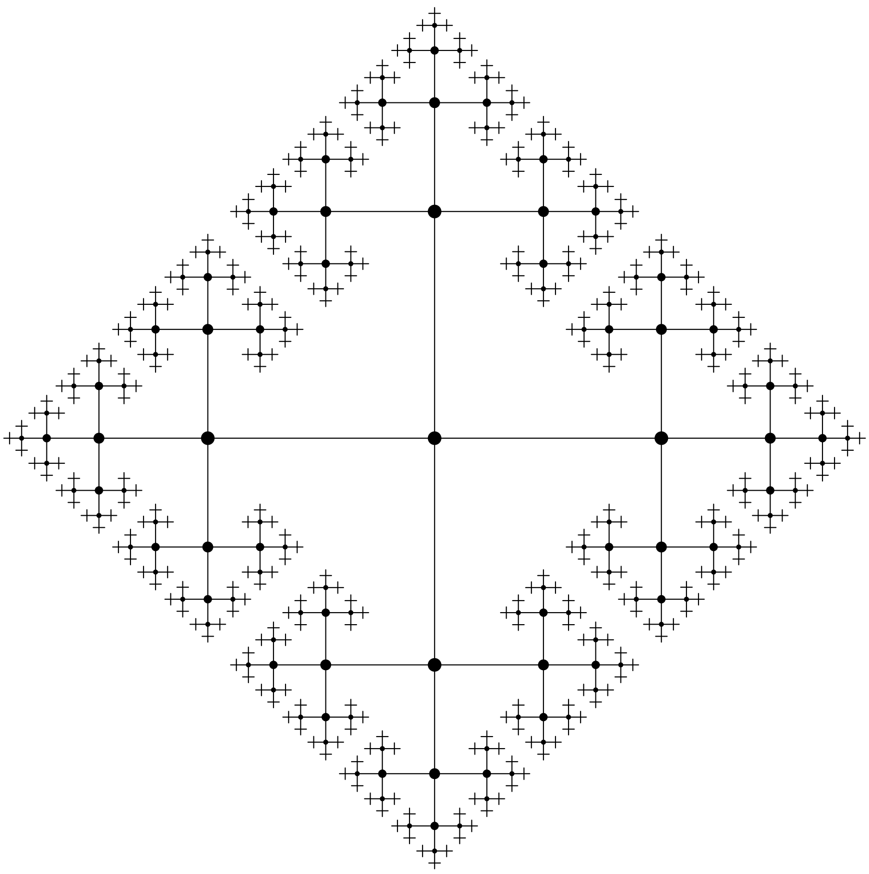
$\cdots$

である．また，同型 $D_\infty \cong \mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ について，

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{(1,0),(0,1)\}) = \cdots$  $\cdots,$

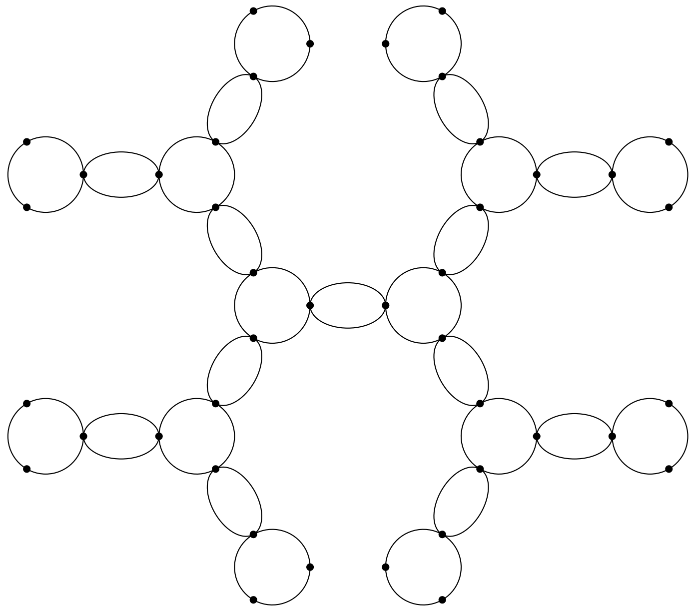
$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{(1,0),(0,1)\}) = \cdots$  $\cdots$

である ($\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のときとは辺の向きが異なることに注意する)．
- $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(x,y),\{x,y\}) \cong \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(x,y),\{x,y\})$ は以下のような形をしたグラフである．

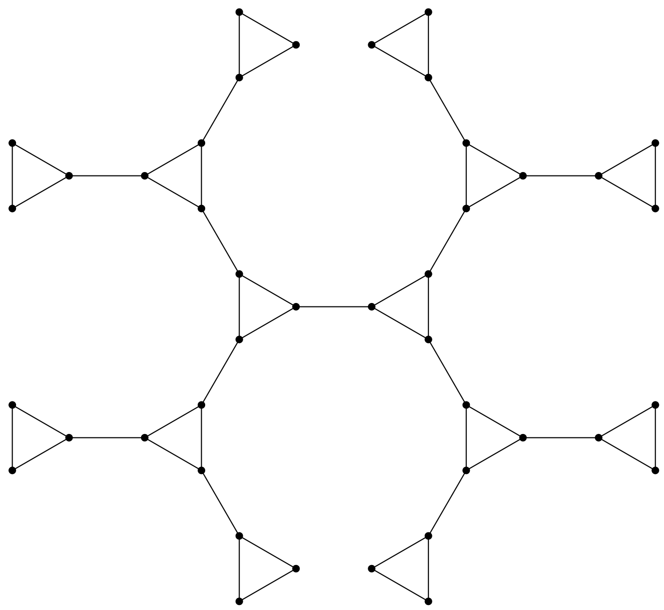


- $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle\, s, r \mid s^2, r^3 \,\rangle$ について，$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\{s,r\})$ は以下のような形をしたグ

ラフである．



- 一方，$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \{s, r\})$ は以下のようなグラフである．



命題 7.5 **([Ser80, Chapter I, §2.2, Proposition 7]).** 群 G と部分集合 $S \subseteq G$ に対し，以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{Cay}(G, S)$ が連結グラフ $\iff$ $G = \langle S \rangle$.
(2) $\mathrm{Cay}(G, S)$ が自己ループを持つ $\iff$ $1_G \in S$.
(3) $\mathrm{Cay}(G, S)$ が単純グラフ $\iff$ $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

証明． (1) ($\Longrightarrow$) $\mathrm{Cay}(G, S)$ が連結であることより，どんな $g \in G$ に対してもあるパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to \mathrm{Cay}(G, S)$ があって $f(0) = 1_G$ かつ $f(n) = g$ が成り立つ．パスの長さ n に関する帰納法で $g \in \langle S \rangle$ を示す．$n = 0$ のときは $g = 1_G \in \langle S \rangle$ である．n のとき成り立つと仮定し，長さ $n+1$ のパス $f\colon \mathsf{Path}_{n+1} \to \mathrm{Cay}(G, S)$

をとると，帰納法の仮定から $f(n) \in \langle S \rangle$ が成り立つ．Cayley グラフの定義からある $a \in S^{\pm 1}$ に対し $f(n+1) = f(n)a$ が成り立つので $f(n+1) \in \langle S \rangle$ を得る．

($\Longleftarrow$) すべての $g \in G$ に対して 1_G と g を結ぶ $\mathrm{Cay}(G,S)$ 内のパスが存在することを示せば十分である．$g \in G = \langle S \rangle$ より $g = a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots a_n^{e_n}$ $(a_i \in S, e_i \in \{\pm 1\})$ と書ける．ここで $f\colon \mathsf{Path}_n \to \mathrm{Cay}(G,S)$ を

$$f(i) := a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots a_i^{e_i} \in G \qquad (0 \le i \le n),$$

$$f((i,i+1)) := \begin{cases} (f(i), a_{i+1}) \in G \times S & (e_{i+1} = +1 \text{ のとき}), \\ \overline{(f(i+1), a_{i+1})} \in \overline{G \times S} & (e_{i+1} = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (0 \le i < n)$$

と定義すると，f は $f(0) = 1_G$ と $f(n) = g$ を結ぶパスである．

(2) 辺 $(g,a) \in G \times S$ が自己ループであることは $g = s((g,a)) = t((g,a)) = ga$ を意味し，これは $1_G = a \in S$ と同値である (辺 $\overline{(g,a)} \in \overline{G \times S}$ についても同様).

(3) 2 つの辺 $(g,a), (g',a') \in G \times S$ が多重辺であるとすると $g = s((g,a)) = s((g',a')) = g'$ かつ $ga = t((g,a)) = t((g',a')) = g'a'$ より $(g,a) = (g',a')$ となり矛盾する．よって多重辺があるとすれば $(g,a) \in G \times S$ と $\overline{(g',a')} \in \overline{G \times S}$ という形でなければならないが，このとき $g = s((g,a)) = s(\overline{(g',a')}) = g'a'$ かつ $ga = t((g,a)) = t(\overline{(g',a')}) = g'$ ゆえ $a'a = 1_G$，すなわち $a' = a^{-1} \in S \cap S^{-1}$ が成り立つ．逆に $a \in S \cap S^{-1}$ なる元がとれるとき，$a \in S^{-1}$ より $a = (a')^{-1}$ となる元 $a' \in S$ がとれ，このとき $s((g,a)) = g = gaa' = s(\overline{(ga,a')})$ かつ $t((g,a)) = ga = t(\overline{(ga,a')})$ だが $(g,a) \neq \overline{(ga,a')}$ である (Cayley グラフの辺集合の定義から $(G \times S) \cap \overline{G \times S} = \emptyset$ であることに注意する). $\square$

補題 7.6. G を群，$S \subseteq G$ を部分集合とし，$\mathrm{Cay}(G,S)$ が単純グラフであるとする．このときラベルを保つ同型 $\mathrm{Cay}(G,S) \cong \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ がある．

証明. $\mathrm{Cay}(G,S)$ が単純グラフであることより特に自己ループを含まないので，命題 7.5.(2) の ($\Longleftarrow$) から $1_G \notin S$，すなわち $S^{\pm 1} = S^{\pm 1} - \{1_G\}$ が成り立つ．よってグラフ準同型写像 $f\colon \mathrm{Cay}(G,S) \to \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ を，各 $g \in G$ と $a \in S$ に対し

$$f(g) := g \in \mathrm{V}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)),$$
$$f((g,a)) := (g,a,ga) \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)),$$
$$f(\overline{(g,a)}) := (ga, a^{-1}, g) \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$$

と定義できる．Cayley グラフと単純化 Cayley グラフの定義より明らかに f は全射である．頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to \mathrm{V}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$ は G から G への恒等写像だから当然，単射である．辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$ が単射であることを示すために，2 辺 $y_1, y_2 \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S))$ で $f(y_1) = f(y_2)$ となるものをとる．

($y_1 = (g_1,a_1), y_2 = (g_1,a_2)$ のとき) このとき $(g_1, a_1, g_1a_1) = f(y_1) = f(y_2) = (g_2, a_2, g_2a_2)$ だから $y_1 = (g_1,a_1) = (g_2,a_2) = y_2$ を得る．

($y_1 = (g_1,a_1), y_2 = \overline{(g_2,a_2)}$ のとき) このとき $(g_1, a_1, g_1a_1) = f(y_1) = f(y_2) = (g_2a_2, a_2^{-1}, g_2)$ だから $a_1 = a_2^{-1} \in S \cap S^{-1}$ となるはずだが，これは命題 7.5.(3) の ($\Longrightarrow$) に反する．よってこのようなケースは起こり得ない．

($y_1 = \overline{(g_1,a_1)}, y_2 = (g_2,a_2)$ のとき) 対称性から上と同様である．

($y_1 = \overline{(g_1,a_1)}, y_2 = \overline{(g_2,a_2)}$ のとき) $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ を考えれば一番最初の場合に帰着される． $\square$

次に，群 G の Cayley グラフ $\mathrm{Cay}(G,S)$ への作用を考える．

命題 7.7.　G を群，$S \subseteq G$ を部分集合とするとき，G の $\mathrm{Cay}(G,S)$ への自然な作用 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ が定まり，α は自由かつ反転なしの作用である．

証明． 作用 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ を，各 $g' \in G$ と $g \in \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(G,S)) = G, a \in S$ に対し

$$\alpha(g')(g) := g'g,$$
$$\alpha(g')((g,a)) := (g'g, a),$$
$$\alpha(g')(\overline{(g,a)}) := \overline{(g'g,a)}$$

と定義する (実際に作用になっていることの確認は容易である)．各 $g', g \in G, a \in S$ に対し

$$g \text{ が } \alpha(g') \text{ の固定点} \iff g = \alpha(g')(g) = g'g \iff g' = 1_G,$$

であることより，α は頂点集合 G への自由な作用である．α が辺集合への自由な作用であることは，もし $\alpha(g')$ が辺を固定するならその始点も固定するという事実からわかる．また定義から明らかに α は向き $G \times S \subseteq \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S))$ を保つので，特に α は反転なしの作用である．□

注意 7.8.　命題 7.7 は単純化 Cayley グラフ $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ に対しては成立しない．例えば，群 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の単純化 Cayley グラフ $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{1\})$ への作用は明らかに反転を持ち，向きを保たない．

命題 7.9.　G を群，$S \subseteq G$ を部分集合，$H \leq G$ を部分群とする．包含写像 $i\colon H \hookrightarrow G$ と命題 7.7 の作用 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ との合成作用 $\alpha \circ i\colon H \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ による商グラフ $H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S)$ を考える．ここで $(G:H)$ が有限であることと $H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S)$ が有限グラフであることは同値であり，そのとき等式

$$|\mathrm{V}(H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S))| = (G:H), \qquad \frac{|\mathrm{E}(H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S))|}{2} = (G:H)\cdot|S|$$

が成り立つ (ここで $|\mathrm{E}(H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S))|/2$ は $H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S)$ の無向辺の本数であることに注意)．

証明． 2 頂点 $g, g' \in \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(G,S)) = G$ に対し，

$$\mathrm{Orb}_H(g) = \mathrm{Orb}_H(g') \iff \exists h \in H\ [g' = hg] \iff Hg = Hg'$$

だから $|\mathrm{V}(H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S))| = |H\backslash G| = (G:H)$ である．また，2 辺 $(g,a),(g',a') \in G \times S$ に対し，

$$\mathrm{Orb}_H((g,a)) = \mathrm{Orb}_H((g',a')) \iff \exists h \in H\ [(g',a') = (hg,a)] \iff Hg = Hg' \wedge a = a'$$

だから，H の作用 $\alpha \circ i$ が向きを保つことと合わせて

$$|\mathrm{E}(H\backslash\,\mathrm{Cay}(G,S))| = 2\cdot|H\backslash(G\times S)| = 2\cdot|(H\backslash G)\times S| = 2\cdot(G:H)\cdot|S|.$$
□

以下の命題は群準同型写像が Cayley グラフの間のグラフ準同型写像に自然に拡張されることを主張するものである．

命題 7.10.　G, H を群，$S \subseteq G$ を部分集合，$f\colon G \to H$ を群準同型写像とするとき，自然にグラフ準同型写像 $f_*\colon \mathrm{Cay}(G,S) \to \mathrm{Cay}(H, f(S))$ が定義できる．さらにこのとき以下が成り立つ．

(1) f が単射な群準同型写像 $\iff$ f_* が単射なグラフ準同型写像．
(2) f が全射な群準同型写像 $\iff$ f_* が全射なグラフ準同型写像．
(3) f が群の同型写像 $\iff$ f_* がグラフの同型写像．

証明．$f_*\colon \mathrm{Cay}(G,S) \to \mathrm{Cay}(H,f(S))$ を各 $g \in G, a \in S$ に対し

$$\begin{aligned}
f_*(g) &:= f(g) \in \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(H,f(S))),\\
f_*((g,a)) &:= (f(g),f(a)) \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(H,f(S))),\\
f_*(\overline{(g,a)}) &:= \overline{(f(g),f(a))} \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(H,f(S)))
\end{aligned}$$

と定義すればグラフ準同型写像になることは容易にわかる．群準同型写像 $f\colon G \to H$ が頂点間の写像 $f_*\colon \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(H,f(S)))$ と同一のものであることに注意すると，($\Longleftarrow$) 向きはどれも明らかであり，($\Longrightarrow$) 向きについても辺の間の写像 $f_*\colon \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(H,f(S)))$ の性質だけ確かめればよいことがわかる．

(1) 定義より辺の間の写像 $f_*\colon \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(H,f(S)))$ は向きを保つので，制限写像 $f_*{\restriction}(G \times S)\colon G \times S \to H \times f(S)$ が単射であることを言えば十分である ($f_*{\restriction}\overline{G \times S}$ についても同様にすればよい)．実際，$(g_1,a_1),(g_2,a_2) \in G \times S$ に対し $f_*((g_1,a_1)) = f_*((g_2,a_2))$ のとき $(f(g_1),f(a_1)) = (f(g_2),f(a_2))$ だから，f の単射性より $(g_1,a_1) = (g_2,a_2)$ が成り立つ．

(2) 任意の $(h,f(a)) \in H \times f(S)$ ($h \in H, a \in S$) に対し，f の全射性から $f(g) = h$ となる元 $g \in G$ がとれ，よって $f_*((g,a)) = (f(g),f(a)) = (h,f(a))$ となる．$\overline{H \times f(S)}$ に対しても同様のことが言えるので，辺の間の写像 $f_*\colon \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(H,f(S)))$ は全射である．

(3) (1) と (2) より明らか． □

7.1.2 群の語の問題との関係

G を有限生成群とし，部分集合 $S \subseteq G$ を有限な生成系とする．有限アルファベットを $\Sigma := S^{\pm 1} - \{1_G\} \subseteq G$ で定義する ($S \cap S^{-1} \neq \emptyset$ でもよい)．このとき全射なモノイド準同型写像 $\pi\colon \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ が各 $a \in \Sigma$ に対し $\pi(\underline{a}) := a \in G$ とおくことで定義される．単純化 Cayley グラフ $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ 内の，頂点 $g \in \mathrm{V}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$ を始点とするパス全体の集合を $\Pi(g)$ と書くことにする．このとき 2 つの写像 $F_g^{\mathrm{path}}\colon \Sigma^* \to \Pi(g)$ と $F^{\mathrm{label}}\colon \Pi(g) \to \Sigma^*$ を次のように定義する．

- 長さ $n \in \mathbb{N}$ の文字列 $w = \underline{a_1}\,\underline{a_2} \cdots \underline{a_n} \in \Sigma^n$ に対し (ここで $\underline{a_i}$ は元 $a_i \in G$ を Σ の元に「文字化」したものである)，長さ n のパス $F_g^{\mathrm{path}}(w)\colon \mathsf{Path}_n \to \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ を

$$\begin{aligned}
F_g^{\mathrm{path}}(w)(i) &:= g \cdot a_1 a_2 \cdots a_i \in \mathrm{V}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)) && (0 \le i \le n),\\
F_g^{\mathrm{path}}(w)((i,i+1)) &:= (F^{\mathrm{path}}(w)(i), a_{i+1}, F^{\mathrm{path}}(w)(i) \cdot a_{i+1}) \in \mathrm{E}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)) && (0 \le i < n)
\end{aligned}$$

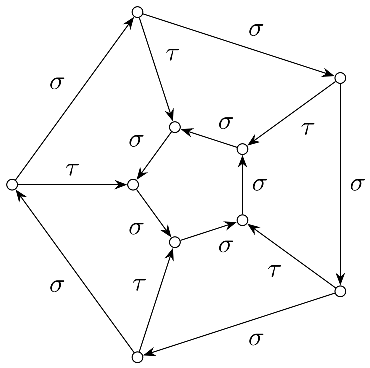
  と定義すると $F_g^{\mathrm{path}}(w) \in \Pi(g)$ となる．
- 長さ $n \in \mathbb{N}$ のパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ で $f(0) = g \in \mathrm{V}(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S))$ となるものに対し，長さ n の文字列 $F^{\mathrm{label}}(f) = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^n$ を，各 $i = 1,2,\ldots,n$ に対し $a_i := \ell(f((i-1,i))) \in \Sigma$ で定義する．

定義から容易にわかるように，F_g^{path} と F^{label} は互いに逆写像になっている．この対応のもとで，語の問題 $\mathrm{WP}_\pi(G) \subseteq \Sigma^*$ に対応するパスの集合 $F_g^{\mathrm{path}}(\mathrm{WP}_\pi(G)) \subseteq \Pi(g)$ は $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ 内の g が始点かつ終点であるようなパス，すなわち $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ 内の g を通る閉路全体の集合となっている．逆に言えば「**群の語の問題 $\mathrm{WP}_\pi(G)$ とは，単純化 Cayley グラフ $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ 内の閉路のラベル全体の集合である**」ということである．

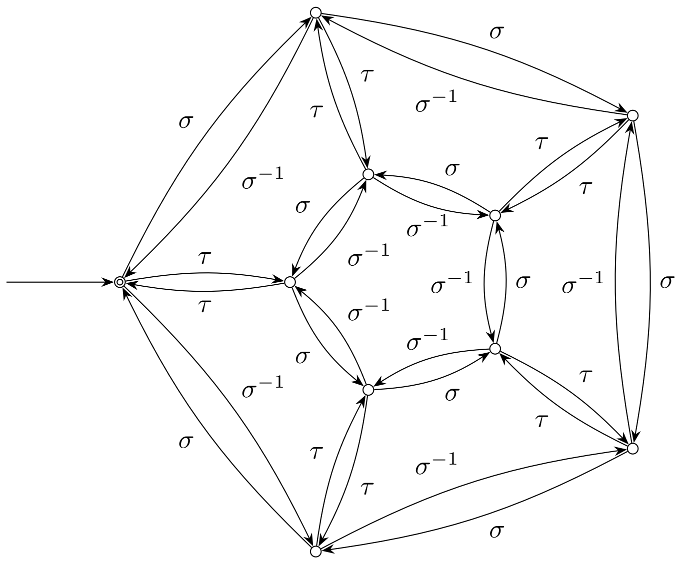
群 G が有限である場合には，生成系 $S \subseteq G$ に関する G の単純化 Cayley グラフ $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G,S)$ を DFA とみなすことで，G の語の問題を認識する DFA が以下のようにして構成できる．

例 7.11. 位数 10 の二面体群 $D_5 = \left\langle \sigma := \begin{pmatrix} \cos(2\pi/5) & -\sin(2\pi/5) \\ \sin(2\pi/5) & \cos(2\pi/5) \end{pmatrix}, \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ について，単純化 Cayley グラフ

$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(D_5, \{\sigma, \tau\})$ は以下のようなグラフである．



ここで有限アルファベットを $\Sigma := \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau\}$ とおくと全射モノイド準同型写像 $\pi \colon \Sigma^* \twoheadrightarrow D_5$ が自然に定まる．このとき語の問題 $\mathrm{WP}_\pi(D_5)$ を認識する DFA が以下の状態遷移図で与えられる．



例 7.11 の構成は定理 5.9 における (1) $\Longrightarrow$ (2) の別証明を与えている．

7.2 自由群と木

本節では「自由群の部分群は自由群である」という Nielsen–Schreier の定理を証明する．証明に際しては「木に自由かつ反転なしで作用する群は自由群である」というより幾何学的な結果 (定理 7.21) を経由する．これらの結果は 10 章においてさらに一般化される．

7.2.1 部分木の持ち上げ

まず，商グラフの全域木がもとのグラフに「持ち上がる」ことを示す．

補題 7.12 ([Ser80, Chapter I, §3.1, Proposition 14])**.** Γ を連結グラフ，G を群とし，G は Γ に反転なしで作用するとする．命題 6.52 より商グラフ $\Gamma_* := G \backslash \Gamma$ が定まり，商写像 $p \colon \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma_*$ がとれる．このとき，商グラフ Γ_* のどの部分木 $T_* \subseteq \Gamma_*$ も Γ に**持ち上がる** (lift)，言い換えると，ある部分木 $T \subseteq \Gamma$ が存在し，制限写像 $p{\restriction}T \colon T \to \Gamma_*$

は単射かつ $\mathrm{Im}(p{\restriction}T) = T_*$ をみたす．すなわち，$p{\restriction}T\colon T \to T_*$ がグラフの同型写像になる．

証明．より強く，部分木 $T_* \subseteq \Gamma_*$ と任意の頂点 $P_* \in \mathrm{V}(T_*)$ とその逆像の元 $P_0 \in p^{-1}(P_*)$ に対し，T_* の持ち上げ $T \subseteq \Gamma$ を $P_0 \in \mathrm{V}(T)$ をみたすようにとれることを示す．まず，

$$\mathcal{T} := \{\, T \subseteq \Gamma \mid T \text{ は木} \wedge P_0 \in \mathrm{V}(T) \wedge p{\restriction}T\colon T \to T_* \text{ は単射} \,\}$$

とおく (ここで「$p{\restriction}T\colon T \to T_*$ は単射」という条件は $\mathrm{Im}(p{\restriction}T) \subseteq T_*$ を意味することに注意)．頂点 $P_0 \in \mathrm{V}(\Gamma)$ だけからなる Γ の部分グラフ (辺はなし) は明らかに $\mathcal{T}$ に属すので $\mathcal{T} \neq \emptyset$ である．$\mathcal{T}$ は包含関係 (部分グラフであるという関係) で順序集合をなす．$\mathcal{T}$ が帰納的順序集合であることは命題 6.42 の証明と同様にしてわかる．よって Zorn の補題から $\mathcal{T}$ は極大元 $T \in \mathcal{T}$ を持つ．この木 T が補題の条件をみたすことを見るには，制限写像 $p{\restriction}T\colon T \to T_*$ が全射であることを言えばよい．そこで制限写像 $p{\restriction}T\colon T \to T_*$ が全射でないと仮定する．T は連結性から空でなく，また T_* も連結だから，系 6.25 よりある辺 $y_* \in \mathrm{E}(T_*)$ で $s(y_*) \in \mathrm{V}(\mathrm{Im}(p{\restriction}T)) \not\ni t(y_*)$ なるものがとれる．$s(y_*) \in \mathrm{V}(\mathrm{Im}(p{\restriction}T))$ よりある頂点 $P \in \mathrm{V}(T)$ で $p(P) = s(y_*)$ となるものがとれる．$\mathrm{Orb}_G(y) = y_*$ となる辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ をとると，$\mathrm{Orb}_G(s(y)) = s(\mathrm{Orb}_G(y)) = s(y_*) = p(P) = \mathrm{Orb}_G(P)$ が成り立つ．よってある元 $g \in G$ について $g \cdot s(y) = P$ が成り立つ (図 7.1)．このとき，T に頂点 $t(g \cdot y) \in \mathrm{V}(\Gamma)$ と辺 $g \cdot y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ を付け加えたグラフを T' とすると $T \subsetneq T'$ かつ $T' \in \mathcal{T}$ がわかるが，これは T の極大性に反する．以上より $p{\restriction}T\colon T \to T_*$ は同型写像である． □

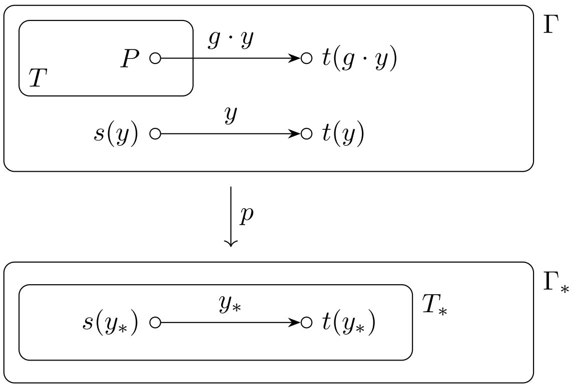
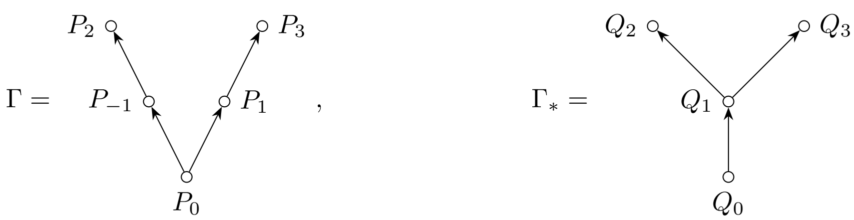


図 7.1　部分木の持ち上げ

注意 7.13 ([Ser80, Chapter I, §3.1, Exercise])．　補題 7.12 はどんな全射なグラフ準同型写像に対しても成り立つわけではない．例えば，二つの連結な単純グラフ



の間の全射な準同型写像 $f\colon \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma_*$ を $f(P_i) := Q_{|i|}$ で定義すると，部分木 $T_* = \Gamma_*$ の Γ への持ち上げは存在しない．

7.2.2　部分木を潰す

6.8 節ではグラフへの群の作用による商グラフを考えたが，ここではグラフの部分木を縮約 (contract) してできるグラフを考える．

定義 7.14 (部分木の族を縮約してできるグラフ).　$\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ をグラフとし，$(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を Γ の部分木の族で互いに素なもの，すなわち

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda\, [\lambda \neq \mu \implies \mathrm{V}(T_\lambda) \cap \mathrm{V}(T_\mu) = \emptyset] \tag{7.1}$$

をみたすものであるとする ($\mathrm{V}(T_\lambda) \cap \mathrm{V}(T_\mu) = \emptyset$ ならば $\mathrm{E}(T_\lambda) \cap \mathrm{E}(T_\mu) = \emptyset$ でもあることに注意)．V 上の同値関係 $\sim$ を，頂点 $P, Q \in V$ に対し

$$P \sim Q \; :\Longleftrightarrow \; P = Q \vee \exists \lambda \in \Lambda\, [P \in \mathrm{V}(T_\lambda) \ni Q]$$

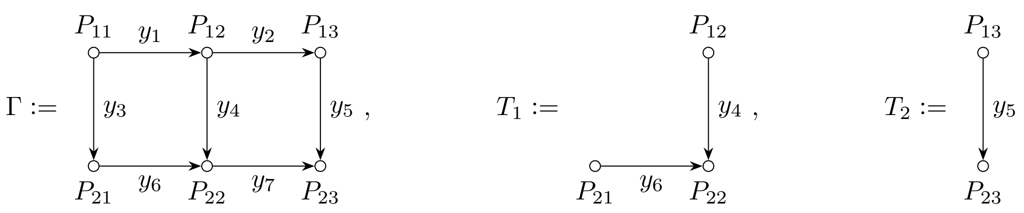
で定義する ($\sim$ が同値関係であることの証明には $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が互いに素であるという条件が必要である)．$\sim$ に関する商写像を $\pi\colon V \twoheadrightarrow V/{\sim}$ とおく．このとき T_λ たちを “1 点に潰して” できる商グラフ $\Gamma / \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda = (V', E', s', t', \bar{\cdot}')$ を次のように定義する．

- $V' := V/{\sim}$,
- $E' := E - \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{E}(T_\lambda)$,
- $s'(y) := \pi(s(y))$,
- $t'(y) := \pi(t(y))$,
- $\bar{y}' := \bar{y}$.

商集合 V' の各同値類は 1 点集合であるか，またはある $\lambda \in \Lambda$ について $\mathrm{V}(T_\lambda)$ という形をしている．そこで同値類が 1 点集合 $\{P\} \in V'$ のときは $\{P\}$ の代わりに単に P と書くことにし，$\mathrm{V}(T_\lambda)$ のときは T_λ とも書くことにする．

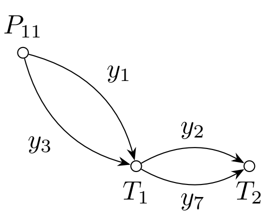
定義 7.14 のグラフ Γ' は，頂点集合については Γ の商になっているものの，一般には Γ の商グラフにはならない．なぜなら次の例からわかるように，各 $T_\lambda \subseteq \Gamma$ 内の辺の行き先がないからである．

例 7.15.　部分木を縮約した空間の例を見る．



のとき，

$\Gamma/(T_1 \sqcup T_2) =$



である．

以下の命題は，トポロジーの観点からは部分木を縮約したグラフ $\Gamma/\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ がもとのグラフ Γ とホモトピー同値である，ということを主張するものである (cf. [Ser80, Chapter I, §2.3, Proposition 13])．

命題 7.16.　グラフ Γ とその互いに素な部分木の族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を定義 7.14 のようにとる．このとき以下が成り立つ．

(1) Γ が連結 $\iff$ $\Gamma/\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}$ が連結．
(2) Γ が単純閉路を持つ $\iff$ $\Gamma/\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}$ が単純閉路を持つ．
(3) Γ が木 $\iff$ $\Gamma/\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}$ が木．

証明． $\Gamma' := \Gamma/\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ とおき，商写像 $\pi\colon \mathrm{V}(\Gamma) \twoheadrightarrow \mathrm{V}(\Gamma')$ を固定する．(1)–(3) を同時に証明する．

($\Longrightarrow$) 各辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma)$ に対し，Γ' 内の長さ 1 以下のパス $\check{y}$ を

$$\check{y} := \begin{cases} (y) & (y \in \mathrm{E}(\Gamma') \text{ のとき}), \\ [\pi(s(y)), \pi(t(y))] & (y \notin \mathrm{E}(\Gamma') \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する ($y \notin \mathrm{E}(\Gamma') = \mathrm{E}(\Gamma) - \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{E}(T_\lambda)$ のとき，ある $\lambda \in \Lambda$ について $y \in \mathrm{E}(T_\lambda)$ であるので $\pi(s(y)) = T_\lambda = \pi(t(y))$，したがって $\check{y}$ が長さ 0 のパスとなることに注意せよ)．

2 頂点 $\pi(P), \pi(Q) \in \mathrm{V}(\Gamma')$ $(P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma))$ を任意にとる．Γ が連結グラフのとき，P と Q を結ぶ Γ 内のパス $f = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(y_i \in \mathrm{E}(\Gamma))$ がとれる．このとき $\check{f} := \check{y}_1 \cdot \check{y}_2 \cdot \cdots \cdot \check{y}_n$ は $\pi(P)$ と $\pi(Q)$ を結ぶ Γ' 内のパスである．

主張 7.17.　f が逆行のないパスならば $\check{f}$ も逆行のないパスである．

証明． 仮に f に逆行がないのに $\check{f}$ が逆行を持つとすると，$1 \le i \wedge i+2 \le j \wedge j \le n$ なるある i, j について $y_i, y_j \in \mathrm{E}(\Gamma')$ かつ $y_i = \bar{y}_j$ が成り立ち，さらに $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_{j-1} \notin \mathrm{E}(\Gamma')$ が成り立つ．族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が互いに素であることからある単一の $\lambda \in \Lambda$ について $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_{j-1} \in \mathrm{E}(T_\lambda)$ が成り立つ．このとき Γ 内の $t(y_i)$ と $s(y_j)$ を結ぶパス $g = (y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_{j-1})$ は逆行がないので，系 6.44 より $g = T_\lambda[t(y_i), s(y_j)]$ であり，その長さは $j - i - 1 \ge 1$ である．一方，$y_i = \bar{y}_j$ より $t(y_i) = t(\bar{y}_j) = \overline{t(y_j)} = s(y_j)$ だから $T_\lambda[t(y_i), s(y_j)]$ は長さ 0 でなければならず，矛盾が生じる．□

よって補題 6.39 より，Γ が単純閉路を持てば Γ' も単純閉路を持つ．

($\Longleftarrow$) ただ一つの頂点のみからなるグラフは木であることから，$\mathrm{V}(\Gamma) = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{V}(T_\lambda)$ であると仮定して一般性を失わない．このとき各辺 $y \in \mathrm{E}(\Gamma')$ に対し，$t(y) \in \mathrm{V}(T_\lambda)$ となるような $\lambda = \lambda(y) \in \Lambda$ がただ一つ存在する．任意に 2 点 $P, Q \in \mathrm{V}(\Gamma)$ をとると，Γ' の連結性から $\pi(P)$ と $\pi(Q)$ を結ぶ Γ' 内のパス $f = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(y_i \in \mathrm{E}(\Gamma'))$ がとれる．$P \in \mathrm{V}(T_{\lambda(P)})$ となる唯一の $\lambda(P) \in \Lambda$ をとると，合成

$$\hat{f} := T_{\lambda(P)}[P, s(y_1)] \cdot y_1 \cdot T_{\lambda(y_1)}[t(y_1), s(y_2)] \cdot y_2 \cdot T_{\lambda(y_2)}[t(y_2), s(y_3)] \cdot \cdots \cdot y_n \cdot T_{\lambda(y_n)}[t(y_n), Q]$$

は P と Q を結ぶ Γ 内のパスである．また，パス f が Γ' 内の単純閉路ならば $\hat{f}$ は Γ 内の単純閉路である．□

7.2.3　Cayley グラフが木になる群は自由群に限る

補題 7.18.　集合 X に対し，自由群 $\mathrm{F}(X)$ の Cayley グラフ $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X), X)$ は連結な単純グラフである．よって特に補題 7.6 から同型 $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X), X) \cong \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(X), X)$ が成り立つ．

証明. 自由群 $\mathrm{F}(X)$ においては $\mathrm{F}(X) = \langle X \rangle$ だから命題 7.5.(1) より $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X), X)$ は連結グラフであり，また $X \cap X^{-1} = \emptyset$ だから命題 7.5.(3) の $(\Longleftarrow)$ より $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X), X)$ は単純グラフである． □

命題 7.19 ([Ser80, Chapter I, §3.2, Proposition 15])**.** 群 G と部分集合 $S \subseteq G$ に対し，

$$G \cong \mathrm{F}(S) \iff \mathrm{Cay}(G, S) \text{ は木.}$$

証明. 命題の内容はより正確には，包含写像 $S \hookrightarrow G$ に対して自由群の普遍性 (命題 4.15) から定まる群準同型写像 $f\colon \mathrm{F}(S) \to G$ が全単射であることと，$\mathrm{Cay}(G, S)$ が木であることが同値であるということである．2 つの部分集合 $S \subseteq \mathrm{F}(S)$ と $f(S) = S \subseteq G$ は備わっている演算が異なることに注意せよ (前者は自由群 $\mathrm{F}(S)$ の基底だから常に $S \cap S^{-1} = \emptyset$ が成り立つが，後者は群 G のただの部分集合なので $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$ となる可能性がある)．

$(\Longrightarrow)$ 命題 7.10 の $(\Longrightarrow)$ より $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(S), S) \cong \mathrm{Cay}(G, S)$ だから，$\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(S), S)$ が木であることを言えばよい．補題 7.18 より $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(S), S)$ は連結グラフであり，また同型 $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(S), S) \cong \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S)$ が成り立つので，$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S)$ が単純閉路を持たないことを示せば証明が終わる．
$\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S)$ が単純閉路を持つと仮定し，$c\colon \mathsf{Cycle}_n \to \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S)$ を単純閉路とする．c を始点と終点が同じパス $p\colon \mathsf{Path}_n \to \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S)$ と同一視することにすると，c が単純サイクルであることより p は逆行のないパスである．いま $S \cap S^{-1} = \emptyset$ であることより，$S^{\pm 1} - \{1_{\mathrm{F}(S)}\}$ と $\Sigma_S = S \sqcup \bar{S}$ を自然に同一視することができる．そこで 7.1.2 節の写像 $F^{\mathrm{label}}\colon \Pi(p(0)) \to \Sigma_S^*$ について S 上の語 $w := F^{\mathrm{label}}(p) \in \Sigma_S^*$ を考えると，p の始点と終点が一致することより $w \in \mathrm{WP}_\pi(\mathrm{F}(S))$ が成り立つ (ただし $\pi\colon \Sigma_S^* \twoheadrightarrow \mathrm{F}(S)$ は自然な商写像)．よって $[w] = [\varepsilon] \in \mathrm{F}(S)$，すなわち $w \xRightarrow[\mathrm{C}[S]]{*} \varepsilon$ となる．いま $\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S)$ は単純グラフだから単純閉路 c の長さは $|w| = n \geq 3$ でなければならず，よって S 上の語 $F^{\mathrm{label}}(p) \in \Sigma_S^*$ は被約語ではありえない．一方 p は逆行のないパスだったので，対応するラベル $w = F^{\mathrm{label}}(p)$ は被約語でなければならず，矛盾が生じる．

$(\Longleftarrow)$ $\mathrm{Cay}(G, S)$ は木であるので特に連結だから，命題 7.5.(1) の $(\Longrightarrow)$ より $G = \langle S \rangle$ である．よって群準同型写像 $f\colon \mathrm{F}(S) \to G$ は全射だから，命題 7.10 より全射なグラフ準同型写像 $f_*\colon \mathrm{Cay}(\mathrm{F}(S), S) \twoheadrightarrow \mathrm{Cay}(G, S)$ が誘導される．補題 7.18 と $\mathrm{Cay}(G, S)$ が木であることより $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(S), S)$ と $\mathrm{Cay}(G, S)$ はどちらも単純グラフだから，補題 7.6 より $f_*\colon \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S) \twoheadrightarrow \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G, S)$ と思ってよい．

主張 7.20. $f_*\colon \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S) \twoheadrightarrow \mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(G, S)$ は局所的に単射なグラフ準同型写像である．

証明. 頂点 $w \in \mathrm{F}(S)$ を始点とする 2 辺 $y_1 = (w, a_1, wa_1), y_2 = (w, a_2, wa_2) \in E(\mathrm{Cay}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(S), S))$ $(a_1, a_2 \in S^{\pm 1} - \{1_{\mathrm{F}(S)}\})$ であって $f_*(y_1) = f_*(y_2)$ なるものを任意にとると，$f(S) = S$ であることより $i = 1, 2$ に対し $f_*(y_i) = f_*((w, a_i, wa_i)) = (f(w), f(a_i), f(w)f(a_i)) = (f(w), a_i, f(w)a_i)$ だから $a_1 = a_2$ となり，$y_1 = y_2$ を得る． □

よって命題 6.49 より f_* はグラフの同型写像だから，命題 7.10.(3) の $(\Longleftarrow)$ より f は同型写像である． □

7.2.4 木に自由かつ反転なしで作用する群は自由群である

ここまでの結果を用いて，次の定理を証明する．

定理 7.21 ([Ser80, Chapter I, §3.3, Theorem 4])**.** 群 G が木 $\Gamma = (V, E, s, t, \bar{\cdot})$ に自由かつ反転なしで作用するならば，G は自由群である．

証明．G の Γ への自由かつ反転なしの作用を $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ とおく．α が反転なしであることより命題 6.52 から商グラフ $\Gamma_* := G\backslash\Gamma$ と商写像 $p\colon \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma_*$ がとれる．Γ は木ゆえ特に連結だから，その商グラフ Γ_* も連結である (実際，任意の 2 点 $p(P), p(Q) \in \mathrm{V}(\Gamma_*)$ $(P, Q \in V)$ に対して，Γ の連結性から存在する，P と Q を結ぶ Γ 内のパス $f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma$ の像 $p \circ f\colon \mathsf{Path}_n \to \Gamma_*$ が $p(P)$ と $p(Q)$ を結ぶ Γ_* 内のパスを与える)．よって命題 6.42 より Γ_* の全域木 $T_* \subseteq \Gamma_*$ がとれる．補題 7.12 より，$T_* \subseteq \Gamma_*$ の持ち上げ $T \subseteq \Gamma$ を制限写像 $p{\restriction}T\colon T \to T_*$ が同型写像になるようにとれる．各元 $g \in G$ に対し，部分木 $gT \subseteq \Gamma$ が $\mathrm{V}(gT) := \alpha(g)(\mathrm{V}(T)), \mathrm{E}(gT) := \alpha(g)(\mathrm{E}(T))$ によって自然に定まる．

主張 7.22. $(gT)_{g\in G}$ は Γ の互いに素な部分木の族であり，$V = \bigsqcup_{g\in G} \mathrm{V}(gT)$ が成り立つ．

証明．各 gT が部分木であることは T が部分木であることと $\alpha(g) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ であることよりよい．互いに素であることを，条件 (7.1) の対偶を示すことにより証明する．2 元 $g_1, g_2 \in G$ で $\mathrm{V}(g_1T) \cap \mathrm{V}(g_2T) \neq \emptyset$ となるようなものを任意にとる．このときある 2 頂点 $P_1, P_2 \in \mathrm{V}(T)$ について $\alpha(g_1)(P_1) = \alpha(g_2)(P_2)$ が成り立ち，よって $p(P_1) = \mathrm{Orb}_G(P_1) = \mathrm{Orb}_G(P_2) = p(P_2)$ となるが，$p{\restriction}T$ は同型写像ゆえ特に単射だから $P_1 = P_2$ となる．したがって $\alpha(g_1)(P_1) = \alpha(g_2)(P_1)$ となるので $\alpha(g_2^{-1}g_1)(P_1) = P_1$ となり，α の自由性から $g_1 = g_2$ を得る．
任意に頂点 $P \in V$ をとると，制限写像 $p{\restriction}T\colon T \to T_*$ が同型であることより特に全射だから，T_* の全域性と合わせてある頂点 $Q \in \mathrm{V}(T)$ について $\mathrm{Orb}_G(Q) = p(Q) = p(P) = \mathrm{Orb}_G(P)$ が成り立つ．よってある $g \in G$ があり $P = \alpha(g)(Q)$ となるので $P \in \mathrm{V}(gT)$ となり，$V = \bigsqcup_{g\in G} \mathrm{V}(gT)$ を得る．□

よって定義 7.14 の方法で $(gT)_{g\in G}$ を潰した商グラフ $\Gamma' := \Gamma/\bigsqcup_{g\in G} gT$ ができる．Γ は木だから，命題 7.16.(3) より Γ' も木である．補題 6.54 より作用 α で保たれるような，Γ の向き $E_+ \subseteq E$ がとれる．このとき Γ' の向きを $E'_+ := E_+ \cap E' = E_+ \cap (E - \bigsqcup_{g\in G} \mathrm{E}(gT)) = E_+ - \bigsqcup_{g\in G} \mathrm{E}(gT)$ で定義できる．

主張 7.23. α は G の Γ' への自然な作用 $\beta\colon G \to \mathrm{Aut}(\Gamma')$ を誘導し，β は向き E'_+ を保つ．

証明．主張 7.22 より各頂点 $P' \in V'$ に対しただ一つの $g \in G$ が存在して $P' = gT$ と書ける．よって G の頂点集合 V' への作用を，各元 $g' \in G$ と各頂点 $gT \in V'$ に対し $\beta(g')(gT) := (g'g)T$ とおくことで定義できる．また，G の辺集合 E' への作用を，各 $g' \in G$ と $y \in E'$ に対し $\beta(g')(y) := \alpha(g')(y)$ で定義する．この定義が well-defined であるためには，$\alpha(g')(y) \in E'$ となる必要がある．仮に $\alpha(g')(y) \notin E'$，すなわちある $g \in G$ について $\alpha(g')(y) \in \mathrm{E}(gT) = \alpha(g)(\mathrm{E}(T))$ であるとすると，$y \in \alpha((g')^{-1})(\alpha(g)(\mathrm{E}(T))) = \mathrm{E}(((g')^{-1}g)T)$ となるが，これは $y \in E'$ であることに反する．$y \in E'_+$ ならば $\alpha(g')(y) \in E'_+$ であることも同様である．□

G の部分集合 $S \subseteq G$ を

$$S := \{\, a \in G - \{1_G\} \mid \exists y \in E_+ \; [s(y) \in \mathrm{V}(T) \wedge t(y) \in \mathrm{V}(aT)] \,\}$$

とおく．

主張 7.24. 各 $gT \subseteq \Gamma$ は誘導部分グラフ，すなわち辺 $y \in E$ について $s(y), t(y) \in \mathrm{V}(gT)$ なら $y \in \mathrm{E}(gT)$ が成り立つ．

証明．$s(y), t(y) \in \mathrm{V}(gT)$ のとき，仮に $y \notin \mathrm{E}(gT)$ であるとすると，パス $y \cdot (gT)[t(y), s(y)]$ は Γ 内の単純閉路となり，これは Γ が木であることに反する．□

主張 7.25. $S = \{\, a \in G - \{1_G\} \mid \exists! y \in E'_+ \; [s(y) \in \mathrm{V}(T) \wedge t(y) \in \mathrm{V}(aT)] \,\}$.

証明． ($\subseteq$) 元 $a \in S$ を任意にとると，ある辺 $y \in E_+$ について $s(y) \in \mathrm{V}(T)$ かつ $t(y) \in \mathrm{V}(aT)$ が成り立つ．$y \in E'_+$ を示す．仮に $y \notin E'_+$ であるとすると，ある $g \in G$ について $y \in \mathrm{E}(gT)$ が成り立つ．このとき $s(y) \in \mathrm{V}(gT)$ かつ $t(y) \in \mathrm{V}(gT)$ だから $s(y) \in \mathrm{V}(T) \cap \mathrm{V}(gT)$ かつ $t(y) \in \mathrm{V}(aT) \cap \mathrm{V}(gT)$ となる．このとき主張 7.22 より $1_G = g$ かつ $a = g$，よって $a = 1_G$ が成り立つが，これは S の定義に反する．次に一意性を示す．仮に 2 辺 $y_1, y_2 \in E'_+$ で $y_1 \neq y_2$ かつ $s(y_1), s(y_2) \in \mathrm{V}(T)$ かつ $t(y_1), t(y_2) \in \mathrm{V}(aT)$ となるものがあったとすると，パス $y_1 \cdot (aT)[t(y_1), t(y_2)] \cdot \bar{y}_2 \cdot T[s(y_2), s(y_1)]$ は Γ 内の単純閉路となるが，これは Γ が木であることに反する．

($\supseteq$) $E'_+ \subseteq E_+$ より明らか． $\square$

各 $a \in S$ に対し，主張 7.25 よりただ一つ存在する辺 $y \in E'_+$ のことを y_a と書くことにすると，グラフ準同型写像 $f\colon \mathrm{Cay}(G, S) \to \Gamma'$ を各 $g \in G, a \in S$ に対し

$$\begin{aligned} f(g) &:= gT, \\ f((g,a)) &:= \beta(g)(y_a), \\ f(\overline{(g,a)}) &:= \beta(g)(\bar{y}_a) \end{aligned}$$

とおくことにより定義できる (実際にグラフ準同型写像の定義をみたすことの確認は容易)．f が全単射であることを示す．主張 7.22 より $V = \bigsqcup_{g \in G} \mathrm{V}(gT)$ だから頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to V'; g \mapsto gT$ が全単射であることはよい．辺の間の写像 $f\colon \mathrm{E}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to E'$ が全単射であることを示す．

(全射性) グラフ準同型写像の定義より，任意の辺 $y \in E'_+$ にうつる辺があることを示せば十分である．辺 $y \in E'_+ = E_+ - \bigsqcup_{g \in G} \mathrm{E}(gT)$ を任意にとると，$V = \bigsqcup_{g \in G} \mathrm{V}(gT)$ であることより $s'(y) = g_1 T \in V', t'(y) = g_2 T \in V'$ となる $g_1, g_2 \in G$ がとれる．このとき辺 $\beta(g_1^{-1})(y) \in E'_+ \subseteq E_+$ について $s'(\beta(g_1^{-1})(y)) = \beta(g_1^{-1})(s'(y)) = \beta(g_1^{-1})(g_1 T) = T$ かつ $t'(\beta(g_1^{-1})(y)) = \beta(g_1^{-1})(t'(y)) = \beta(g_1^{-1})(g_2 T) = (g_1^{-1} g_2)T$ となるので，$y \in E'_+$ と主張 7.24 より $g_1^{-1} g_2 \neq 1_G$ でなければならないことと合わせて，$g_1^{-1} g_2 \in S$ かつ $y_{g_1^{-1} g_2} = \beta(g_1^{-1})(y)$ が成り立つ．よって $y = \beta(g_1)(\beta(g_1^{-1})(y)) = \beta(g_1)(y_{g_1^{-1} g_2}) = f((g_1, g_1^{-1} g_2))$ を得る．

(単射性) f の定義から，制限写像 $f{\restriction}(G \times S)\colon G \times S \to E'_+$ は well-defined になる．E'_+ と $\overline{E'_+}$ は互いに素なので，$f{\restriction}(G \times S)$ が単射であることを示せば十分である．$f((g_1, a_1)) = f((g_2, a_2))$ ($g_i \in G, a_i \in S$) とするとき，$i = 1, 2$ に対し

$$\begin{aligned} s'(f((g_i, a_i))) &= s'(\beta(g_i)(y_{a_i})) = \beta(g_i)(s'(y_{a_i})) = \beta(g_i)(T) = g_i T = f(g_i), \\ t'(f((g_i, a_i))) &= t'(\beta(g_i)(y_{a_i})) = \beta(g_i)(t'(y_{a_i})) = \beta(g_i)(a_i T) = (g_i a_i)T = f(g_i a_i) \end{aligned}$$

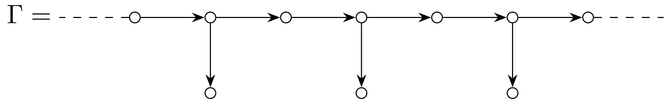
であるから $f(g_1) = f(g_2)$ かつ $f(g_1 a_1) = f(g_2 a_2)$ が成り立つ．頂点間の写像 $f\colon \mathrm{V}(\mathrm{Cay}(G,S)) \to V'$ は全単射だったから $g_1 = g_2$ かつ $g_1 a_1 = g_2 a_2$ が成り立ち，$(g_1, a_1) = (g_2, a_2)$ を得る．

よって Γ' が木であることからそれと同型な $\mathrm{Cay}(G, S)$ も木であり，命題 7.19 の ($\Longleftarrow$) により同型 $G \cong \mathrm{F}(S)$ を得る． $\square$

注意 7.26. 定理 7.21 を代数トポロジー (被覆空間論) の視点から見てみよう．ここでは厳密な定義や証明を書くことはしないが，詳細を知りたい読者は例えば [fla20] や [Hat02] などを参照のこと．群 G の，連結かつ局所弧状連結かつ単連結な位相空間 X への連続な作用 $G \curvearrowright X$ を考える．この作用が自由かつ**真性不連続** (properly discontinous) であるとき，商写像 $p\colon X \twoheadrightarrow G \backslash X$ との組 (X, p) は $G \backslash X$ 上の被覆空間になる．(本当はただの位相空間ではなく基点付き空間で議論した方がよいのだが，説明が面倒なのでこれ以降も基点は省略する．) X が単連結であることより (X, p) は普遍被覆空間である．よって群としての同型 $\pi_1(G \backslash X) \cong \mathrm{Aut}(X/(G \backslash X)) \cong G$ が成り

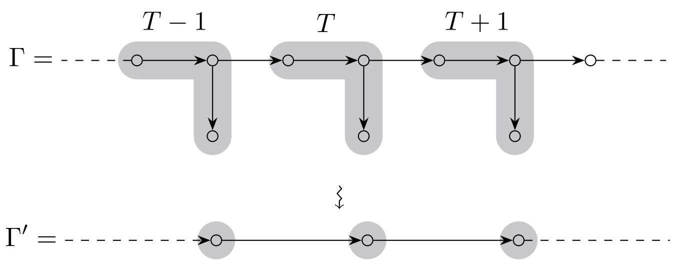
立つ．X がグラフ (すなわち 1 次元複体) のとき，その商 $G\backslash X$ もグラフとなるのでその基本群 $\pi_1(G\backslash X)$ は自由群となり，よって G も自由群となる．
10 章ではグラフの基本群の組合せ論的な一般化のひとつとして，群付きグラフの基本群を取り扱う．

例 7.27.　階数 1 の自由群 $G=\mathbb{Z}$ が木



に距離 2 ずつの平行移動 ($+1$ なら右へ，-1 なら左へ) で作用するとする．このとき商グラフ $\Gamma_*=\mathbb{Z}\backslash\Gamma$ とその全域木うちのひとつ T_* は

という形をしている．ここで T_* の Γ への持ち上げ T の平行移動全体からなる部分木の族 $(T+n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を縮約すると



となり，Γ' は Cayley グラフ $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{1\})$ と同型である．

7.2.5　Nielsen–Schreier の定理と Schreier の指数公式

定理 7.21 から直ちに次の Nielsen–Schreier の定理が得られる．

系 7.28 (Nielsen–Schreier の定理).　自由群の部分群は自由群である．

証明． 集合 X を基底とする自由群 $\mathrm{F}(X)$ とその部分群 $G\leq\mathrm{F}(X)$ について，命題 7.19 の ($\Longrightarrow$) より Cayley グラフ $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X),X)$ は木であり，命題 7.7 より $\mathrm{F}(X)$ の $\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X),X)$ への自由かつ反転なしの作用 $\alpha\colon\mathrm{F}(X)\to\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X),X))$ がある．このとき包含写像 $i\colon G\hookrightarrow\mathrm{F}(X)$ との合成 $\alpha\circ i\colon G\to\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(\mathrm{F}(X),X))$ も自由かつ反転なしの作用である．よって定理 7.21 より G は自由群である． □

次に，定理 7.21 の証明をより詳細に追うことで Schreier の指数公式 (定理 7.35) を証明する．

命題 7.29 ([Ser80, Chapter I, §3.3, Theorem 4', b)]).　定理 7.21 の証明と同じ設定のもとで以下が成り立つ．

(1) E_+ の部分集合を
$$W:=\{\,y\in E_+\mid s(y)\in\mathrm{V}(T)\wedge t(y)\notin\mathrm{V}(T)\,\}$$
で定義すると，写像 $y_{(-)}\colon S\to W; a\mapsto y_a$ は well-defined な全単射である．

(2) Γ_* と T_* の向きをそれぞれ $\mathrm{E}(\Gamma_*)_+:=p(E_+)\subseteq\mathrm{E}(\Gamma_*)$ と $\mathrm{E}(T_*)_+:=\mathrm{E}(T_*)\cap\mathrm{E}(\Gamma_*)_+$ によって定義でき，さ

らにこのとき $\mathrm{E}(\Gamma_*)_+ = \mathrm{E}(T_*)_+ \sqcup p(W)$ が成り立つ．

(3) 商グラフ $\Gamma_* = G\backslash\Gamma$ が有限グラフならば，等式

$$\mathrm{rank}(G) - 1 = \frac{|\mathrm{E}(\Gamma_*)|}{2} - |\mathrm{V}(\Gamma_*)|$$

が成り立つ (ここで，$|\mathrm{E}(\Gamma_*)|/2$ は Γ_* の無向辺の本数であることに注意).

証明. (1) (well-defined 性) 各 $a \in S$ に対し $y_a \in W$ となることを示せばよい．y_a の定義から $s(y_a) \in \mathrm{V}(T)$ であることはよい．よって $t(y_a) \notin \mathrm{V}(T)$ であることを言えばよいが，y_a の定義から $t(y_a) \in \mathrm{V}(aT)$ であり，また S の定義より $a \neq 1_G$ なので，主張 7.22 から $\mathrm{V}(T) \cap \mathrm{V}(aT) = \emptyset$ となり $t(y_a) \notin \mathrm{V}(T)$ が成り立つ．

(全射性) 任意に $y \in W$ をとると，W の定義より $s(y) \in \mathrm{V}(T)$ かつ $t(y) \notin \mathrm{V}(T)$ が成り立つ．主張 7.22 より $t(y) \in V = \bigsqcup_{g \in G} \mathrm{V}(gT)$ だからある $g \in G$ について $t(y) \in \mathrm{V}(gT)$ が成り立つ．よって $t(y) \notin \mathrm{V}(T)$ であることと合わせると $g \neq 1_G$ でなければならないので，$g \in S$ から $y = y_g$ を得る．

(単射性) $a, b \in S$ について $y_a = y_b$ と仮定すると，定義から $\mathrm{V}(aT) \ni t(y_a) = t(y_b) \in \mathrm{V}(bT)$ なので $\mathrm{V}(aT) \cap \mathrm{V}(bT) \neq \emptyset$ となり，主張 7.22 より $a = b$ を得る．

(2) (1) の W に関するいくつかの性質を示す．

主張 7.30. 辺の間の写像 $p\colon E \twoheadrightarrow \mathrm{E}(\Gamma_*)$ の $W \subseteq E_+$ への制限写像 $p{\restriction}W$ は単射である．

証明. 2 つの辺 $y, y' \in W$ に対し $p(y) = p(y')$ とすると，ある元 $g \in G$ について $y' = \alpha(g)(y)$ が成り立つ．このとき W の定義から $\mathrm{V}(T) \ni s(y') = s(\alpha(g)(y)) = \alpha(g)(s(y)) \in \alpha(g)(\mathrm{V}(T)) = \mathrm{V}(gT)$ が成り立つ．よって $\mathrm{V}(T) \cap \mathrm{V}(gT)$ となるので主張 7.22 より $g = 1_G$ だから $y' = \alpha(g)(y) = y$ を得る． □

主張 7.31. 任意の辺 $y \in E$ に対し $p(y) \in p(E_+) \iff y \in E_+$ である．特に，$p^{-1}(p(E_+)) = E_+$ が成り立つ．

証明. $y \in E$ に対し

$$\begin{aligned}
p(y) \in p(E_+) &\iff \exists y_+ \in E_+\ [p(y) = p(y_+)] \iff \exists y_+ \in E_+\ [\mathrm{Orb}_G(y) = \mathrm{Orb}_G(y_+)] \\
&\iff \exists y_+ \in E_+\ \exists g \in G\ [\alpha(g)(y) = y_+] \iff \exists g \in G\ [\alpha(g)(y) \in E_+] \\
&\iff y \in E_+ \qquad (E_+ \text{ が } G \text{ で保たれることより})
\end{aligned}$$

となる． □

$\mathrm{E}(\Gamma_*)_+ = p(E_+) \subseteq \mathrm{E}(\Gamma_*)$ が Γ_* の向きであることを示す．各辺 $y \in E$ に対して，y と $\bar{y}$ に主張 7.31 を適用すると，それぞれ $p(y) \in p(E_+) \iff y \in E_+$ と $\overline{p(y)} = p(\bar{y}) \notin p(E_+) \iff \bar{y} \notin E_+$ が得られ，E_+ が向きであることより $y \in E_+ \iff \bar{y} \notin E_+$ であることと合わせると $p(y) \in p(E_+) \iff \overline{p(y)} \notin p(E_+)$ となり，よって $\mathrm{E}(\Gamma_*)_+$ は Γ_* の向きである．このとき，$\mathrm{E}(T_*)_+ = \mathrm{E}(T_*) \cap \mathrm{E}(\Gamma_*)_+$ が T_* の向きであることは容易にわかる．

主張 7.32. $p^{-1}(\mathrm{E}(T_*)) = \bigsqcup_{g \in G} \mathrm{E}(gT)$.

証明. ($\subseteq$) 辺 $y \in p^{-1}(\mathrm{E}(T_*))$ を任意にとると，ある辺 $y' \in \mathrm{E}(T_*)$ について $p(y) = y'$ が成り立つ．T のとり方より $p{\restriction}T \colon T \to T_*$ は全射だから，ある辺 $y_1 \in \mathrm{E}(T)$ があって $p(y_1) = y' = p(y)$ が成り立つ．よってある元 $g \in G$ について $y = \alpha(g)(y_1) \in \alpha(g)(\mathrm{E}(T)) = \mathrm{E}(gT)$ が成り立つ．

($\supseteq$) 辺 $y \in \mathrm{E}(gT)$ を任意にとると，ある $y_1 \in \mathrm{E}(T)$ があって $y = \alpha(g)(y_1)$ が成り立つ．T のとり方より $p{\restriction}T \colon T \to T_*$ は全射だから特に $p(\mathrm{E}(T)) = \mathrm{E}(T_*)$ となるので $p(y) = \mathrm{Orb}_G(y) = \mathrm{Orb}_G(y_1) = p(y_1) \in p(\mathrm{E}(T)) = \mathrm{E}(T_*)$ となり，よって $y \in p^{-1}(\mathrm{E}(T_*))$ を得る． □

各元 $g \in G$ に対し
$$W_g := \{\, y \in E_+ \mid s(y) \in \mathrm{V}(gT) \wedge t(y) \notin \mathrm{V}(gT) \,\}$$
とおく．特に $W = W_{1_G}$ である．

主張 7.33. $p^{-1}(p(W)) = \bigsqcup_{g \in G} W_g$.

証明. 主張 7.22 より族 $(\mathrm{V}(gT))_{g \in G}$ は互いに素だから，2 元 $g_1, g_2 \in G$ について $g_1 \neq g_2$ のとき $W_{g_1} \cap W_{g_2} \subseteq s^{-1}(\mathrm{V}(g_1T)) \cap s^{-1}(\mathrm{V}(g_2T)) = s^{-1}(\mathrm{V}(g_1T) \cap \mathrm{V}(g_2T)) = s^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ となり，族 $(W_g)_{g \in G}$ も互いに素であることがわかる．

($\subseteq$) 辺 $y \in p^{-1}(p(W))$ を任意にとると，$p(y) \in p(W) \subseteq p(E_+)$ だから主張 7.31 より $y \in E_+$ である．$p(y) \in p(W)$ であることより，ある $y' \in W$ について $\mathrm{Orb}_G(y) = p(y) = p(y') = \mathrm{Orb}_G(y')$ となるので，ある $g \in G$ について $y = \alpha(g)(y')$ が成り立つ．よって $y' \in W$ であることより $s(y) = s(\alpha(g)(y')) = \alpha(g)(s(y')) \in \alpha(g)(\mathrm{V}(T)) = \mathrm{V}(gT)$ かつ $t(y) = t(\alpha(g)(y')) = \alpha(g)(t(y')) \notin \alpha(g)(\mathrm{V}(T)) = \mathrm{V}(gT)$ となり，$y \in W_g$ を得る．

($\supseteq$) $y \in W_g$ のとき，$s(y) \in \mathrm{V}(gT) = \alpha(g)(\mathrm{V}(T)) \wedge t(y) \notin \mathrm{V}(gT) = \alpha(g)(\mathrm{V}(T))$ だから $s(\alpha(g^{-1})(y)) = \alpha(g^{-1})(s(y)) \in \mathrm{V}(T) \wedge t(\alpha(g^{-1})(y)) = \alpha(g^{-1})(t(y)) \notin \mathrm{V}(T)$，よって $\alpha(g^{-1})(y) \in W$ となるから $p(y) = \mathrm{Orb}_G(y) = \mathrm{Orb}_G(\alpha(g^{-1})(y)) = p(\alpha(g^{-1})(y)) \in p(W)$，すなわち $y \in p^{-1}(p(W))$ を得る． □

主張 7.34. $E_+ = \bigsqcup_{g \in G}(\mathrm{E}(gT) \cap E_+) \sqcup \bigsqcup_{g \in G} W_g$.

証明. ($\supseteq$) は明らか．($\subseteq$) を示す．辺 $y \in E_+$ を任意にとると，主張 7.22 より $V = \bigsqcup_{g \in G} \mathrm{V}(gT)$ だからただ一つの $g \in G$ について $s(y) \in \mathrm{V}(gT)$ が成り立つ．このとき $t(y) \in \mathrm{V}(gT)$ と $t(y) \notin \mathrm{V}(gT)$ のうちちょうど一方だけが成り立つ．前者の場合は主張 7.24 より $y \in \mathrm{E}(gT) \cap E_+$ であり，後者の場合は $y \in W_g$ となる． □

以上より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\Gamma_*)_+ &= p(E_+) \\
&= p\left(\bigsqcup_{g \in G} (\mathrm{E}(gT) \cap E_+) \sqcup \bigsqcup_{g \in G} W_g \right) && (\text{主張 7.34 より}) \\
&= p\left(\bigsqcup_{g \in G} (\mathrm{E}(gT) \cap E_+) \sqcup \bigsqcup_{g \in G} (W_g \cap E_+) \right) && (W_g \subseteq E_+ \text{ より}) \\
&= p\left(\left(\bigsqcup_{g \in G} \mathrm{E}(gT) \sqcup \bigsqcup_{g \in G} W_g \right) \cap E_+ \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p((p^{-1}(\mathrm{E}(T_*)) \sqcup p^{-1}(p(W))) \cap p^{-1}(p(E_+))) && (\text{主張 } 7.32,\ 7.33,\ 7.31 \text{ より}) \\
&= p(p^{-1}((\mathrm{E}(T_*) \sqcup p(W)) \cap p(E_+))) \\
&= (\mathrm{E}(T_*) \sqcup p(W)) \cap p(E_+) && (p\colon E \twoheadrightarrow \mathrm{E}(\Gamma_*) \text{ の全射性より}) \\
&= (\mathrm{E}(T_*) \cap p(E_+)) \sqcup (p(W) \cap p(E_+)) \\
&= \mathrm{E}(T_*)_+ \sqcup p(W). && (W \subseteq E_+ \text{ より})
\end{aligned}
$$

(3) Γ_* も T_* も有限グラフだから，計算により

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{E}(\Gamma_*)|}{2} - |\mathrm{V}(\Gamma_*)| &= |\mathrm{E}(\Gamma_*)_+| - |\mathrm{V}(T_*)| && (\mathrm{E}(\Gamma_*)_+ \text{ が向きであり，} T_* \text{ が全域木だから}) \\
&= |\mathrm{E}(T_*)_+| + |p(W)| - |\mathrm{V}(T_*)| && ((2) \text{ より}) \\
&= |W| + \frac{|\mathrm{E}(T_*)|}{2} - |\mathrm{V}(T_*)| && (\text{主張 } 7.30 \text{ と } \mathrm{E}(T_*)_+ \text{ が向きであることより}) \\
&= |S| - 1 && (y_{(-)}\colon S \to W \text{ の全単射性と補題 } 6.46 \text{ より}) \\
&= \mathrm{rank}(G) - 1. && (G \cong \mathrm{F}(S) \text{ より}) \quad \square
\end{aligned}
$$

定理 7.35 (Schreier の指数公式 (Schreier index formula), [Ser80, Chapter I, §3.4, Corollary]). G を自由群で階数 $\mathrm{rank}(G)$ が有限であるものとし，$H \leq G$ を有限指数部分群とする．定理 7.21 より H は自由群である．このとき等式

$$\mathrm{rank}(H) - 1 = (G : H) \cdot (\mathrm{rank}(G) - 1)$$

が成り立つ．特に，$\mathrm{rank}(H)$ は有限である．

証明. G の基底 $S \subseteq G$ について Cayley グラフ $\Gamma := \mathrm{Cay}(G, S)$ をとると，命題 7.19 の ($\Longrightarrow$) より Γ は木である．命題 7.7 の作用 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ をとり，また包含写像 $i\colon H \hookrightarrow G$ との合成 $\alpha \circ i\colon H \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ をとる．このとき

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rank}(H) - 1 &= \frac{|\mathrm{E}(H\backslash\Gamma)|}{2} - |\mathrm{V}(H\backslash\Gamma)| && (\text{命題 } 7.29.(3) \text{ より}) \\
&= (G : H) \cdot |S| - (G : H) && (\text{命題 } 7.9 \text{ より}) \\
&= (G : H)(|S| - 1) \\
&= (G : H)\left(\frac{|\mathrm{E}(G\backslash\Gamma)|}{2} - |\mathrm{V}(G\backslash\Gamma)|\right) && (\text{命題 } 7.9 \text{ より}) \\
&= (G : H)(\mathrm{rank}(G) - 1). && (\text{命題 } 7.29.(3) \text{ より}) \quad \square
\end{aligned}
$$

注意 7.36. 命題 7.29.(3) と定理 7.35 の主張は，代数トポロジーにおける種々の概念を用いることで次のように解釈することができる．定理 7.21 と同じ設定のもとで，

- 自由群 G の **Eilenberg–MacLane 空間** $K(G, 1) = \Gamma_*$ (基本群が $\pi_1(K(G, 1)) \cong G$ となるような空間),
- **Euler 標数** $\chi(G) = \chi(K(G, 1)) = 1 - \mathrm{rank}(G)$,
- **Betti 数** $b_0 = |\mathrm{V}(\Gamma_*)|, b_1 = |\mathrm{E}(\Gamma_*)|/2$

とすると，命題 7.29.(3) の主張は $\chi(G) = b_0 - b_1$，定理 7.35 の主張は $\chi(H) = (G : H)\chi(G)$ と書ける．

7.2.6　具体例

前小節の Nielsen–Schreier の定理 (系 7.28) や Schreier の指数定理 7.35 について，いくつかの具体例を「幾何学的に」見てみよう．以下の例 7.37，例 7.39 における基底 S の求め方については，より明示的で詳細な方法が例えば [Ser80, Chapter I, §3.4, Proposition 16] にある．

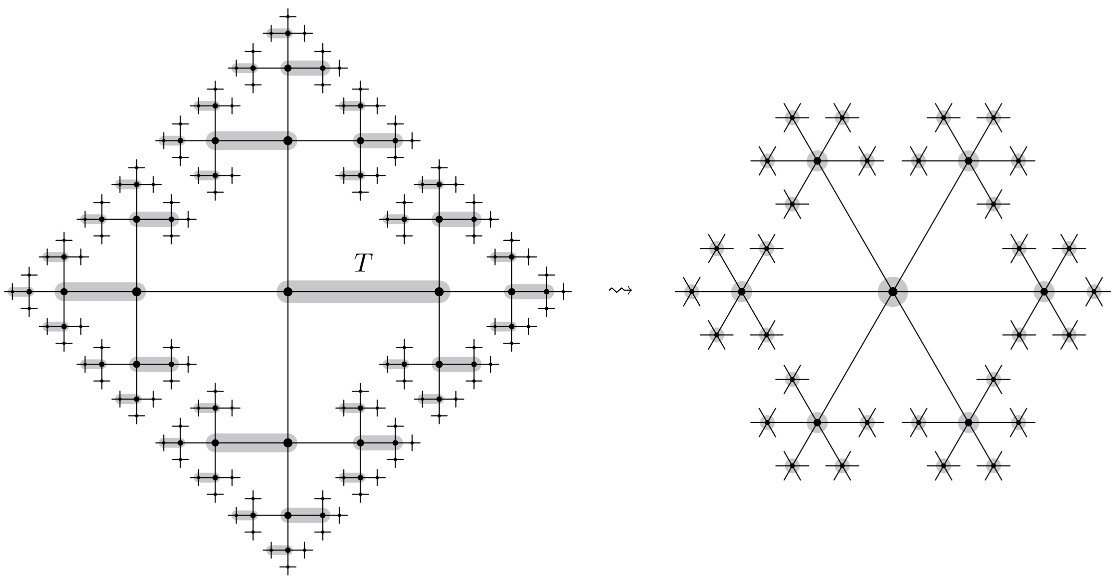
例 7.37.　$F_2 = \mathrm{F}(x, y)$ を階数 2 の自由群とし，$N \le F_2$ を長さが偶数の語で生成される部分群とする．すなわち，

$$\begin{aligned} N &:= \{\, [w] \in F_2 \mid w \in \Sigma^*_{\{x,y\}}, |w| \equiv 0 \pmod 2 \,\} \\ &= \langle x^2, xy, xy^{-1}, yx, yx^{-1}, y^2 \rangle \end{aligned}$$

である (書き換え系 $\mathrm{C}[\{x, y\}]$ が語の長さの偶奇を変化させないことと，長さが偶数の語は長さが 2 の語の積で書けることに注意する)．長さが偶数であるという性質は共役によって変化しないので $N \lhd F_2$ である．Cayley グラフ $\Gamma := \mathrm{Cay}(F_2, \{x, y\})$ への N の自然な作用 $N \curvearrowright \Gamma$ を考え，商グラフ $\Gamma_* := N\backslash\Gamma$ をとる．このとき $F_2 = N \sqcup Nx$ であることより $\mathrm{V}(\Gamma_*) = N\backslash F_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ だから，Γ_* とその全域木のひとつ $T_* \subseteq \Gamma_*$ は

$$\Gamma_* = \begin{tikzcd} \mathrm{Orb}_N(1_{F_2}) \arrow[r, bend left=50, "y"] \arrow[r, shift left, "x"] & \mathrm{Orb}_N(x) \arrow[l, shift left, "x"] \arrow[l, bend left=50, "y"] \end{tikzcd}, \qquad T_* = \begin{tikzcd} \mathrm{Orb}_N(1_{F_2}) \arrow[r, "x"] & \mathrm{Orb}_N(x) \end{tikzcd}$$

のようになる．ここで T_* の Γ への持ち上げ T の平行移動全体からなる部分木の族 $(wT)_{w \in N}$ を縮約すると



となる．定理 7.21 の記号を用いれば $S = \{x^2, xy, yx^{-1}\} \subseteq N$ と書けるので，同型 $N \cong \mathrm{F}\big(x^2, xy, yx^{-1}\big)$ が成り立つ．実際，Schreier の指数定理 7.35 より $\mathrm{rank}(N) = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| \cdot (\mathrm{rank}(F_2) - 1) + 1 = 3$ である．(基本群について知っている読者は，$S = \{x^2, xy, yx^{-1}\}$ が Γ_* の閉路を与えることと，$\pi_1(\Gamma_*) \cong N$ であることにも注目してほしい．)

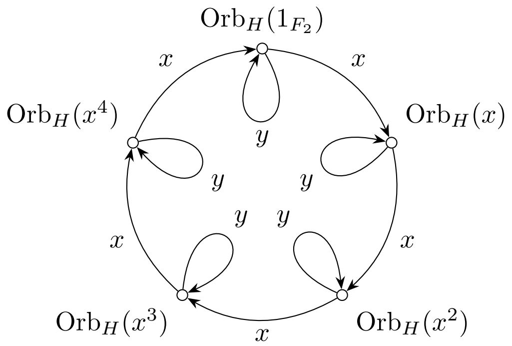
系 7.38.　各整数 $n \ge 2$ に対し，階数 2 の自由群 F_2 は階数 n の自由群 F_n を有限指数の正規部分群として含む．

証明． $F_2 = \mathrm{F}(x, y)$ と $n \ge 2$ に対し，自由群の普遍性 (命題 4.15) より全射群準同型写像 $f\colon F_2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ であって $f(x) = 1 \in \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}, f(y) = 0 \in \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ となるものがとれる．このとき $H := \mathrm{Ker}(f) \lhd F_2$ とおくと Schreier の指数公式 (定理 7.35) より $\mathrm{rank}(H) = (F_2 : H)(\mathrm{rank}(F_2) - 1) + 1 = |\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}| + 1 = n$ が成り立つ． □

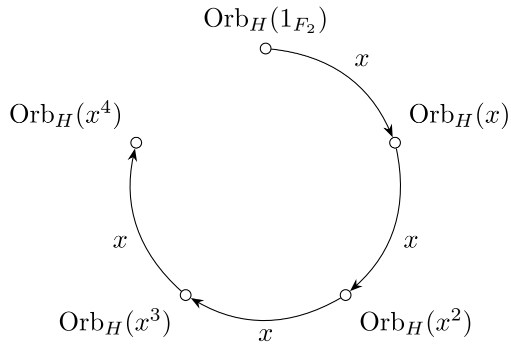
例 7.39.　系 7.38 において $n = 6$ の場合を考える．正規部分群 $H := \mathrm{Ker}(f) \lhd F_2$ の，Cayley グラフ $\Gamma := \mathrm{Cay}(F_2, \{x, y\})$ への自然な作用 $H \curvearrowright \Gamma$ を考え，商グラフ $\Gamma_* := H\backslash\Gamma$ をとる．このとき Γ_* と，その全域木のひと

つ $T_* \subseteq \Gamma_*$ は

$\Gamma_* =$



，　$T_* =$



という形をしている．定理 7.21 の証明から $S = \{x^5, y, xyx^{-1}, x^2yx^{-2}, x^3yx^{-3}, x^4yx^{-4}\} \subseteq H$ がわかるので，同型 $H \cong \mathrm{F}\big(x^5, y, xyx^{-1}, x^2yx^{-2}, x^3yx^{-3}, x^4yx^{-4}\big)$ を得る．

第 8 章

グラフの木幅

第 9 章

カットと構造木

第 10 章

Bass–Serre 理論入門

第 IV 部

付録

付録 A

形式言語理論続論

付録 B

Muller–Schupp の原論文における証明法

付録 C

Stallings の前群と測地的書き換え系

参考文献

[Alp93] Roger C. Alperin, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, Amer. Math. Monthly **100** (1993), no. 4, 385–386. ↑76

[Anī72] A. V. Anīsīmov, *Certain algorithmic questions for groups and context-free languages*, Kibernetika (Kiev) **2** (1972), 4–11 (Russian, with English summary). MR312774 ↑91

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969. MR0242802 ↑54

[BN98] Franz Baader and Tobias Nipkow, *Term rewriting and all that*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. MR1629216 ↑2

[BS62] Gilbert Baumslag and Donald Solitar, *Some two-generator one-relator non-Hopfian groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 199–201, DOI 10.1090/S0002-9904-1962-10745-9. MR142635 ↑87, 88

[Bou16] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie algébrique. Chapitres 1 à 4*, Springer, Heidelberg, 2016 (French). MR3617167 ↑98

[DW17] Volker Diekert and Armin Weiß, *Context-free groups and Bass-Serre theory*, Algorithmic and geometric topics around free groups and automorphisms, Adv. Courses Math. CRM Barcelona, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, pp. 43–110. MR3729161 ↑ii, 29

[Die17] Reinhard Diestel, *Graph theory*, 5th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer, Berlin, 2017. MR3644391 ↑103

[fla20] flag3, 基本群と被覆空間の Galois 理論 (2020), `https://flag3.github.io/pi1.pdf`. Accessed February 23, 2022. ↑126

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354 ↑126

[HT93] Thomas Herbst and Richard M. Thomas, *Group presentations, formal languages and characterizations of one-counter groups*, Theoret. Comput. Sci. **112** (1993), no. 2, 187–213, DOI 10.1016/0304-3975(93)90018-O. MR1216320 ↑90

[HRR17] Derek F. Holt, Sarah Rees, and Claas E. Röver, *Groups, languages and automata*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 88, Cambridge University Press, Cambridge, 2017. MR3616303 ↑90

[HMU03] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, オートマトン 言語理論 計算論 I, 第 2 版 , translated by 野崎 昭弘, 高橋 正子, 町田 元, and 山崎 秀記, Information & computing, サイエンス社, 2003. ↑9

[風上松町 04] 風間 喜代三, 上野 善道, 松村 一登, and 町田 健, 言語学, 第 2 版, 東京大学出版会, 2004. ↑10

[Koz97] Dexter C. Kozen, *Automata and computability*, Undergraduate Texts in Computer Science, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1633052 ↑9

[黒栗斎 05] 信重 黒川, 将人 栗原, and 毅 斎藤, 数論 II—岩澤理論と保型形式, 岩波書店, 2005. ↑71

[Lan05] Serge Lang, *Undergraduate Algebra*, 3rd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, NY, 2005. ↑70

[Law04] Mark V. Lawson, *Finite automata*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. MR2002708 ↑12, 91

[Löh17] Clara Löh, *Geometric group theory*, Universitext, Springer, Cham, 2017. An introduction. MR3729310 ↑72, 74, 75

[LS01] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1977 edition. MR1812024 ↑54, 63, 88

[MS83] David E. Muller and Paul E. Schupp, *Groups, the theory of ends, and context-free languages*, J. Comput. System Sci. **26** (1983), no. 3, 295–310, DOI 10.1016/0022-0000(83)90003-X. MR710250 ↑

[RS59] M. O. Rabin and D. Scott, *Finite automata and their decision problems*, IBM J. Res. Develop. **3** (1959), 114–125, DOI 10.1147/rd.32.0114. MR103795 ↑15

[Sak09] Jacques Sakarovitch, *Elements of automata theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Translated from the 2003 French original by Reuben Thomas. MR2567276 ↑12

[San47] I. N. Sanov, *A property of a representation of a free group*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **57** (1947), 657–659 (Russian). MR0022557 ↑72

[Ser80] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. Translated from the French by John Stillwell. MR607504 ↑62, 63, 70, 98, 103, 110, 113, 116, 120, 121, 123, 124, 127, 130

[新屋 17] 新屋 良磨, オートマトン理論再考, コンピュータソフトウェア **34** (2017), no. 3, 3–35, DOI 10.11309/jssst.34.3_3. ↑9, 12

[Sip08] Michael Sipser, 計算理論の基礎 [原著第 2 版] 1. オートマトンと言語, translated by 阿部 正幸, 植田 広樹, 藤岡 淳, 渡辺 治, 太田 和夫, and 田中 圭介, 共立出版, 2008. ↑9

変更履歴

2021/05/01　第 I 部のみ公開
2021/09/27　第 I 部までを加筆修正
2021/09/27　第 II 部まで公開
2022/06/05　第 II 部までを加筆修正
2022/06/05　第 III 部 7 章まで公開