# タイプ入門

y. (@waidotto)

http://iso.2022.jp/math/model-theory-seminar/type/slide.pdf

2017 年 10 月 15 日

# はじめに

今日やること

- タイプの定義と例
- タイプはある初等拡大の点である
- 飽和モデルの定義と代数閉体の場合の特徴付け
- タイプが等しければ同型写像で写りあうこと
- monster model

## Definition (タイプ)

$\mathcal{M}$ を $L$ 構造，$A \subseteq M$ とする．
自由変数が $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ に含まれる $L(A)$ 論理式からなる集合 $p(\bar{x})$ が $A$ 上の完全 $n$ タイプ (complete $n$-type) であるとは，次の 2 条件を満たすことである:

**(有限充足性)** 任意の有限個の $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ に対し，ある $\bar{a} \in M^n$ が存在して $\mathcal{M} \models \varphi_1(\bar{a}) \wedge \cdots \wedge \varphi_m(\bar{a})$ となる．

**(極大性)** 任意の $L(A)$ 論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ または $\neg\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ が成り立つ．

$A$ 上の完全 $n$ タイプ全体の集合を $\mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$，あるいは単に $\mathrm{S}_n(A)$ で表す．

# タイプの定義 (2/3)

## 知ってる人向けの注意

$M^n$ の $A$ 定義可能部分集合の全体を $\mathrm{Def}_A^n$ で表すことにする．$\mathrm{Def}_A^n$ は自然に Boole 代数になる．
タイプ $p(\bar{x})$ を $M^n$ の $A$ 定義可能集合の族と同一視することで，$p(\bar{x})$ を $\mathrm{Def}_A^n$ 上のウルトラフィルターとみなせる．このとき $A$ 上の $n$ タイプ全体のなす空間 $\mathrm{S}_n(A)$ は $\mathrm{Def}_A^n$ の Stone 空間である．
あるいは，$\mathrm{Def}_A^n$ を Boole 環とみなしたときの $\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_A^n)$ と言うこともできる．
$\mathrm{S}_n(A)$ には $L(A)$ 論理式 $\varphi(\bar{x})$ について $[\varphi] := \{\, p \in \mathrm{S}_n(A) \mid p \ni \varphi \,\}$ を開基とする位相が入り，これにより $\mathrm{S}_n(A)$ は完全不連結コンパクト Hausdorff 空間になる．

# タイプの定義 (3/3)

タイプの具体例を作るのは容易である:

**Definition (元のタイプ)**

$\bar{a} \in M^n, A \subseteq M$ に対し，$\bar{a}$ の $A$ 上のタイプを，$\bar{a}$ が満たす全ての $L(A)$ 論理式の集まり

$$\mathrm{tp}(\bar{a}/A) := \{\, \varphi(\bar{x})\colon L(A)\ \text{論理式} \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \,\}$$

と定義する．

**Definition (realization)**

タイプ $p(\bar{x})$ について，任意の $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ に対して $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ を満たすような $\bar{a} \in M^n$ を $p(\bar{x})$ の解または実現 (realization) という．

明らかに $\bar{a}$ は $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の解である．

# タイプの具体例

## タイプの具体例

$K \models \mathsf{ACF}, k \subseteq K$ を部分体とする．$K, k$ は $L_{\mathsf{ring}}(= \{0, 1, +, \cdot, -\})$ 構造である．

a) $a, b \in K$ を $k$ 上代数的かつ共役な元とすると，体論の一般論より $a$ を $b$ に写す $K$ 上の $k$ 自己同型が存在するので $\mathrm{tp}(a/k) = \mathrm{tp}(b/k)$.
b) $\alpha, \beta \in K$ を $k$ 上超越的な元とすると，$k(\alpha) \cong k(\beta)$ より，やはり $\alpha$ を $\beta$ に写す $K$ 上の $k$ 自己同型が存在するので $\mathrm{tp}(\alpha/k) = \mathrm{tp}(\beta/k)$.

つまり，$A$ 上のタイプが等しいことは「$A$ にとって区別が付かない」ことを意味し，「最小多項式が等しい」ことの一般化になっていると思うことができる．

# タイプの解

**Question**

各元 $\bar{a} \in M^n$ に対し，$A$ 上のタイプ $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) \in \mathrm{S}_n(A)$ を作ることができる．では逆に，$A$ 上の全てのタイプはある $\bar{a} \in M^n$ によって $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の形で書けるだろうか？ つまり，$A$ 上のタイプは常に $\mathcal{M}$ に解を持つだろうか？

# タイプの解

**Question**

各元 $\bar{a} \in M^n$ に対し，$A$ 上のタイプ $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) \in \mathrm{S}_n(A)$ を作ることができる．では逆に，$A$ 上の全てのタイプはある $\bar{a} \in M^n$ によって $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の形で書けるだろうか？ つまり，$A$ 上のタイプは常に $\mathcal{M}$ に解を持つだろうか？

**Answer**

No. たとえば $L_{\mathrm{ring}}$ 構造 $\overline{\mathbb{Q}}$ を考えると，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上超越的な元のタイプは $\overline{\mathbb{Q}}$ に解を持たない．

# タイプは初等拡大の元のタイプである

しかしながら，コンパクト性定理より次がわかる．

**Theorem**

$A$ 上の任意のタイプ $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ はある初等拡大 $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ に解を持つ．

**Proof.**

言語 $L$ に新しい定数記号 $\bar{c}$ を付け加え，$L \cup \{\bar{c}\}$ 理論
$T = \mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M}) \cup p(\bar{c})$ を考える．但しここで
$\mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M}) = \{\varphi \colon L(M)$ 文 $\mid \mathcal{M} \models \varphi\}$ は $\mathcal{M}$ の初等ダイアグラムである．
$p(\bar{x})$ の有限充足性より $T$ の任意の有限部分集合はモデルを持つ．よってコンパクト性定理より $T$ はモデル $\mathcal{N}$ を持つが，$T \supseteq \mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M})$ より $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ であり，また $\bar{c}$ の $\mathcal{N}$ における解釈が $p(\bar{x})$ の解になっている． □

# 飽和モデル

任意のタイプが解を持つような構造があると便利であるが，残念ながらこれは不可能である．なぜなら，$M$ 上の完全タイプ $p(x)$ として任意の $m \in M$ に対し "$x \neq m$" $\in p(x)$ なるものがとれるからである．
しかし，パラメータ集合 $A$ が小さいタイプについては常に解を持つような構造は存在することがある:

**Definition (飽和モデル)**

$\mathcal{M}$ を $L$ 構造，$\kappa$ を無限基数とする．$\mathcal{M}$ が $\kappa$ 飽和 ($\kappa$-saturated) であるとは，濃度 $\kappa$ 未満の任意の部分集合 $A \subseteq M$ に対して，$A$ 上のタイプが $M$ に解を持つことである．これは定義可能集合の言葉で言い換えると，$M$ の定義可能集合からなる濃度 $\kappa$ 未満の族が有限交叉性を持つならば共通部分が空でないことと同値である．
$|M|$ 飽和な $\mathcal{M}$ を飽和モデル (saturated model) という．

# 飽和モデル: 代数閉体の場合

飽和モデルについて，代数閉体の場合は次の特徴付けがある:

**Proposition (飽和性の特徴付け)**

$\kappa$ を無限基数とする．任意の代数閉体 $K \models \mathrm{ACF}$ とその素体 $k$ に対し，

$$K \text{ が } \kappa \text{ 飽和} \iff \mathrm{tr.deg}_k K \geq \kappa.$$

**Proof.**

$\Longleftarrow$ 向きのみ示す．$K \models \mathrm{ACF}_p$ とする．$\mathrm{ACF}_p$ で量化記号消去ができることより，$K$ の定義可能集合は有限または補有限でなければならない．よって，$K$ の定義可能集合の $\kappa$ 個未満の族 $\mathcal{F} = (D_i)_i$ で有限交叉性を持つものを任意にとると，$D_i$ のうち 1 つでも有限なものがあるときは全ての $D_i$ がある 1 点を含み，全ての $D_i$ が補有限なら
$|(\bigcap \mathcal{F})^c| \leq \sum_i |D_i^c| \leq |\mathcal{F}| \cdot \aleph_0 = |\mathcal{F}| < \kappa \leq |K|$ なので $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ である．
($\kappa \leq |K|$ というところに仮定を使った．) □

したがってたとえば複素数体 $\mathbb{C}$ は飽和モデルである．

# タイプが等しければ自己同型で写りあう

## Question

一般に $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ に対し，$\bar{a}$ を $\bar{b}$ に写す自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)$ が存在すれば $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ となる．
では逆に，$A$ 上のタイプが等しい tuple 同士はある $A$ 自己同型で写りあうだろうか？

# タイプが等しければ自己同型で写りあう

**Question**

一般に $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ に対し，$\bar{a}$ を $\bar{b}$ に写す自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)$ が存在すれば $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ となる．
では逆に，$A$ 上のタイプが等しい tuple 同士はある $A$ 自己同型で写りあうだろうか？

**Answer**

飽和モデルでは Yes.

例えば，$\mathbb{C}$ では次が成り立つのであった．

**Theorem**

$(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{Q}$ 上代数的独立な $\mathbb{C}$ の元の列とする．このときある体自己同型 $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在して任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma(\alpha_i) = \beta_i$ となる．

証明するには $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{Q}$ 上の超越基底に延長すればよい．

# タイプが等しければ自己同型で写りあう

## Definition

写像 $h\colon A \to N$ が $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像 (elementary mapping) または部分初等埋め込み (partial elementary embedding) であるとは，任意の $L$ 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対して

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

が成り立つことをいう．

一般に濃度が $\kappa$ の飽和モデル $\mathcal{M}$ は次の均質性 (homogeneity) を持つ:

## Theorem

濃度が $\kappa$ 未満の任意の部分集合 $A, B \subseteq M$ と全射な $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ 基本写像 $f\colon A \to B$ について，$f$ を同型写像 $\tilde{f}\colon M \to M$ に延長できる．

# タイプが等しければ自己同型で写りあう

証明は往復論法 (back-and-forth argument) と呼ばれる手法による．

**Proof.**

差集合 $M \setminus A, M \setminus B$ を整列したものをそれぞれ $(a_i)_{i<\kappa}, (b_i)_{i<\kappa}$ とおく．$\sigma_0 \colon A \to B$ を $\sigma_0 := f$ で定める．$(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ 基本写像の増大列 $(\sigma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を超限帰納法により構成する．

- i) $\alpha$ が極限順序数のときは $\sigma_\alpha := \bigcup_{i<\alpha} \sigma_i$ とおく．
- ii) $\alpha$ が後続順序数のときは，ある極限順序数 $\lambda$ と自然数 $n \in \omega$ を用いて $\alpha = \lambda + n + 1$ と表すことができる．
  - a) $n = 2i$ のとき: $p(x) := \mathrm{tp}(a_{\lambda+i}/\operatorname{dom}(\sigma_{\alpha-1}))$ とおくと，$\operatorname{dom}(\sigma_{\alpha-1})$ を $\operatorname{ran}(\sigma_{\alpha-1})$ に置き換えた $\sigma_{\alpha-1}(p)$ は $\operatorname{ran}(\sigma_{\alpha-1})$ 上のタイプとなる．よって $\mathcal{M}$ の飽和性より $\sigma_{\alpha-1}(p)$ は解 $b \in M$ を持つので，$\sigma_\alpha(a_{\lambda+i}) := b$ と定める．

(続く)

# タイプが等しければ自己同型で写りあう

**Proof.**

b) $n = 2i + 1$ のとき: $q(x) := \mathrm{tp}(b_{\lambda+i}/\operatorname{ran}(\sigma_{\alpha-1}))$ とおくと，$\operatorname{ran}(\sigma_{\alpha-1})$ を $\operatorname{dom}(\sigma_{\alpha-1})$ に置き換えた $\sigma_{\alpha-1}^{-1}(q)$ は $\operatorname{dom}(\sigma_{\alpha-1})$ 上のタイプとなる．よって $\mathcal{M}$ の飽和性より $\sigma_{\alpha-1}^{-1}(q)$ は解 $a \in M$ を持つので，$\sigma_\alpha(a) := b_{\lambda+i}$ と定める．

最後に，$\sigma := \bigcup_{i<\kappa} \sigma_i$ とおけば所望の同型写像が得られる． $\square$

# monster model

体の有限次拡大の理論を展開するときは予め代数閉包を一つ固定してその中で作業することが多い．同様に，証明の中で必要になる度に初等拡大をとるのは煩雑であるので，予めとても “大きな” 飽和モデルをひとつ固定し，その中で作業すると都合がよい．

## Fact (monster model)

$T$ を無限モデルを持つ完全な $L$ 理論とする．$T$ の monster model (あるいは big model) $\mathfrak{C}$ とは，次のようなモデルである．

a) $\mathfrak{C}$ は真のクラスである．
b) $T$ の任意のモデルは $\mathfrak{C}$ に初等的に埋め込める．
c) 任意の部分 “集合” $A \subseteq \mathfrak{C}$ 上のタイプは $\mathfrak{C}$ に解を持つ．
d) $\mathfrak{C}$ は均質性を持つ．よって部分集合 $A \subseteq \mathfrak{C}$ 上のタイプが等しい元はある自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ で写りあう．

# 参考文献


- E. Bouscaren (ed.). *Model Theory and Algebraic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics 1696, Springer, 1998.
- 坪井明人. モデル理論とコンパクト性. 田中一之 (編). ゲーデルと 20 世紀の論理学(ロジック)② 完全性定理とモデル理論. pp. 111–190, 東京大学出版会, 2006.
- K. Tent, M. Ziegler, *A Course in Model Theory*, Cambridge University Press, 2012.