無限害優先論法

y. *

2020 年 3 月 8 日

最終更新日: 2020 年 3 月 8 日

概要

無限害優先論法とは c.e. 集合を構成する手法のひとつであり，構成の際に各々の要件が無限回害されうるようなものである．本稿では，Soare の論文 [Soa76] に従い，無限害優先論法の枠組みを用いて Shoenfield の濃密補題 (thickness lemma) を示し，その系として不完全 c.e. 高次数 (incomplete high c.e. degree) が存在することを示す．

本稿における記号の使い方は Soare の教科書 [Soa16] に準拠している．

1 有限害優先論法の復習: Sacks の錐回避定理

有限害優先論法は，比較不能な c.e. 次数の対の存在を示すために Friedberg と Muchnik によって独立に考案された手法である．Friedberg-Muchnik の定理については拙著 [y.19] も参照のこと．ここでは Sacks による**維持戦略** (preservation strategy) を用いた錐回避定理の証明を行う．

定理 1.1 (Δ^0_2 錐回避定理 (Δ^0_2-Cone Avoidance Theorem), Sacks). 集合 C で $\emptyset <_{\mathrm{T}} C \leq_{\mathrm{T}} \emptyset'$ をみたすものに対し，**単純集合** (simple set) A で $C \not\leq_{\mathrm{T}} A$ なるものが存在する (図 1)．このとき特に $\emptyset <_{\mathrm{T}} A <_{\mathrm{T}} \emptyset'$ が成り立つ．

証明. 全ての $e \in \omega$ に対して要件

$$\begin{aligned} P_e &\colon |W_e| = \infty \implies W_e \cap A \neq \emptyset, \\ N_e &\colon C \neq \Phi^A_e \end{aligned}$$

をみたすような，補無限 c.e. 集合 A を構成すればよい．要件 P_e は A に元を**投入** (enter) することで達成できる要件であることから**正の要件** (positive requirement) と呼ばれる．反対に，要件 N_e は A (の有限部分) への元の投入を禁止することによって達成される要件であることが後でわかるので，**負の要件** (negative requirement) と呼ばれる．要件たちの間には $N_0 < P_0 < N_1 < P_1 < N_2 < \cdots$ という**優先度** (priority) が定まっている．優先度の低い (自然数としては大きい) 要件は優先度の高い (自然数としては小さい) 要件を**害して** (injure) はならない．すなわち，各 P_e は $(N_i)_{i<e}$ による「この部分には元を投入するべからず」という要請に反しないように元を投入しなければならない．

---

* `http://iso.2022.jp`

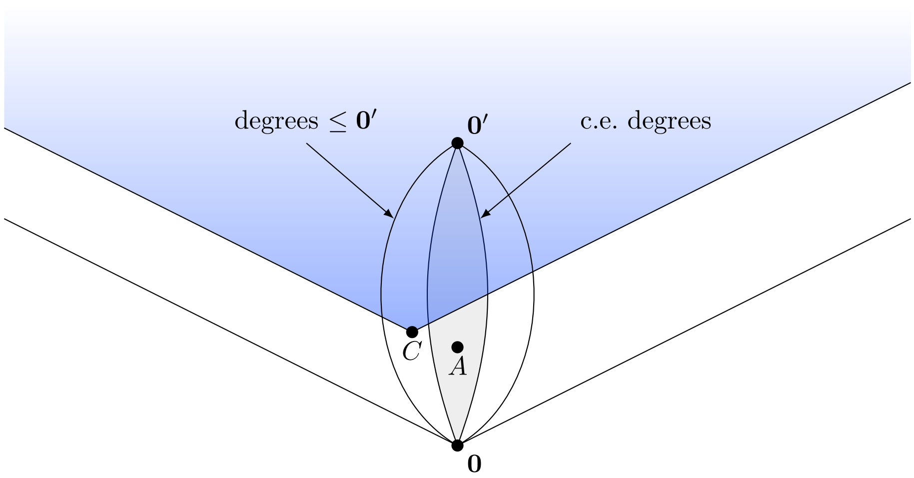

図 1　Δ^0_2 錐回避定理

仮定より $C \leq_{\mathrm{T}} \emptyset'$ だったから Shoenfield の**極限補題** (limit lemma) より一様に計算可能な集合の列 $(C_s)_{s\in\omega}$ [*1]が存在して $\lim_{s\to\infty} C_s = C$ となる．以下では帰納的に A_s を構成して $A := \bigcup_{s\in\omega} A_s$ とする．次のように記号を定義する．

(使用量関数; use function) $\varphi^{A_s}_{e,s}(x)$: $\Phi^{A_s}_{e,s}(x)\downarrow$ ならばその**オラクル使用量** (oracle use) を返し，$\Phi^{A_s}_{e,s}(x)\uparrow$ ならば 0 を返す．[*2]

(長さ関数; length function) $l(e,s) := \max\{\, x \in \omega \mid \forall y < x[C_s(y) = \Phi^{A_s}_{e,s}(y)] \,\}$.

(最大長さ関数; maximum length function) $l^{\max}(e,s) := \max\{\, l(e,t) \mid t \leq s \,\}$.

(束縛関数; restraint function) $r(e,s) := \max\{\, \varphi^{A_s}_{e,s}(x) \mid x \leq l^{\max}(e,s) \,\}$.

(最大束縛関数; maximum restraint function) $r^{\max}(e,s) := \max\{\, r(e,t) \mid t \leq s \,\}$.

(害集合; injury set) $I_{e,s} := \{\, x \in \omega \mid x \in A_{s+1} - A_s \wedge x \leq r^{\max}(e,s) \,\}, I_e := \bigcup_{s\in\omega} I_{e,s}$.

直観的には，$l(e,s)$ は C_s を $\{0,1\}$ の無限列，$\Phi^{A_s}_{e,s}$ を $\{0,1,\uparrow\}$ の無限列とみなしたときに $C_s{\restriction}x = \Phi^{A_s}_{e,s}{\restriction}x$ となるような最大の長さ x (言い換えれば，$C_s(x) \neq \Phi^{A_s}_{e,s}(x)$ となる最小の x) を表しており[*3]，$l^{\max}(e,s)$ は $l(e,s)$ を単調非減少になるように修正したものである．この一致 (と，x における不一致) を**維持する** (preserve) ために A に元を投入してはならない範囲が $r(e,s)$ であり，$r(e,s)$ を単調非減少になるように修正したものが $r^{\max}(e,s)$ である ($r(e,s)$ の定義において「$<$」ではなく「$\leq$」が使われていることに注意せよ)．さらに，この要請 $r^{\max}(e,s)$ に反して A に投入されてしまった元たちが $I_{e,s}$ である．各 $\varphi^{A_s}_{e,s}(x), l(e,s), l^{\max}(e,s), r(e,s), r^{\max}(e,s), I_{e,s}$ は全て計算可能であることを注意しておく．

$(A_s)_{s\in\omega}$ の構成は次のようにする．$A_0 := \emptyset$ とし，第 s ステージでは，$W_{e,s} \cap A_s = \emptyset$ かつ

$$\exists e \leq s[x \in W_{e,s} \wedge x > 2e \wedge \forall i \leq e[x > r^{\max}(i,s)]]$$

が成り立つような $x \in \omega$ を探す．ここで各 $e \leq s$ に対して $W_{e,s}$ は有限集合であるから，この探索は実効的に

[*1] 集合 $\{\, \langle x,s\rangle \mid x \in C_s \,\}$ が計算可能であることをいう．

[*2] 第 s ステージでの値 $\Phi^{A_s}_{e,s}(x)$，$\varphi^{A_s}_{e,s}(x)$ を表すのに **Lachlan の記法** (Lachlan notation) $\Phi^A_e(x)[s]$，$\varphi^A_e(x)[s]$ を用いると添字がすっきりして見やすくなるが，全部書き下した方がわかりやすい (気がする) ので本稿では採用していない．

[*3] 本稿では $\Phi^{A_s}_{e,s}(x)\downarrow = y$ ならば $e, x, y, \varphi^{A_s}_{e,s}(x) < s$ となるような定義を採用しているので，$l(e,s)$ は必ず有限の値になる．

可能である．もしそのような x があれば，最小のものをとって $A_{s+1} := A_s \cup \{x\}$ とおく．もしそのような x が存在しなければ $A_{s+1} := A_s$ のままにしておく．

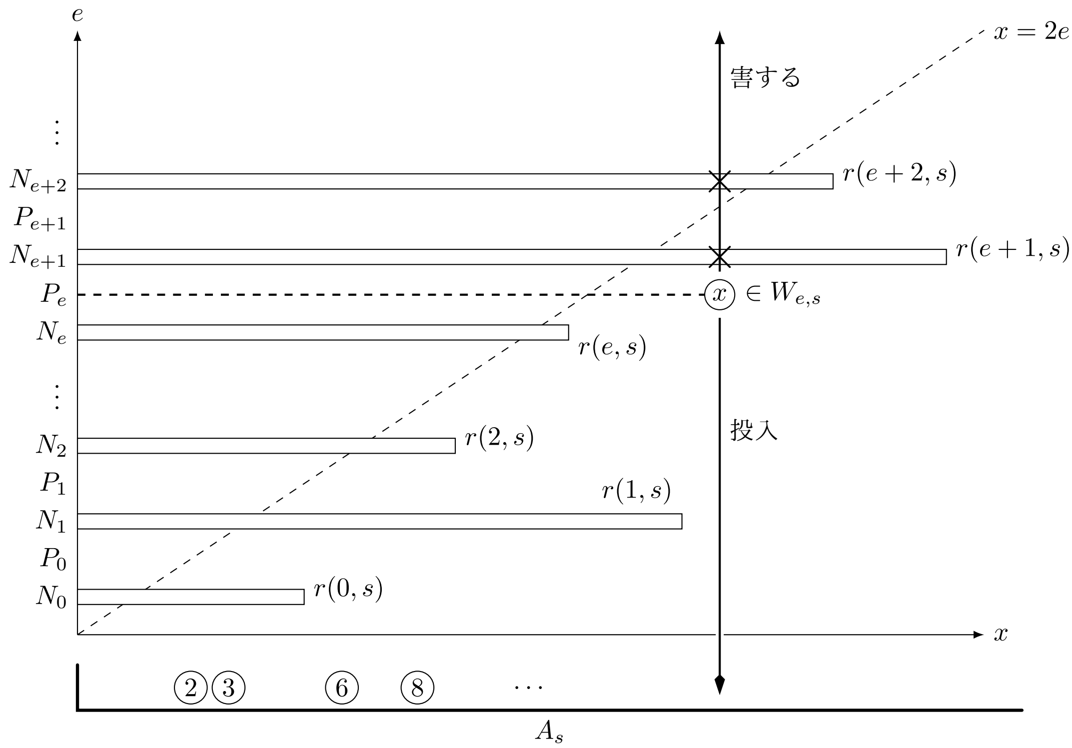

図 2　有限害優先論法による c.e. 集合 A の構成

以上の構成により得られた A が全ての要件を充足することは次の 3 つの補題からわかる．

補題 1.2.　A は要件 $(N_e)_{e\in\omega}$ を全て充足する．すなわち $\forall e \in \omega[C \neq \Phi_e^A]$.

補題 1.3.　全ての $e \in \omega$ に対し，極限 $\lim_{s\to\infty} r^{\max}(e, s)$ は有限の値になる．

補題 1.4.　A は要件 $(P_e)_{e\in\omega}$ を全て充足する．

補題 1.2 の証明. 背理法で示す．ある $e \in \omega$ について $C = \Phi_e^A$ であると仮定すると C が計算可能となってしまうことを言う．構成より，各 P_e は A に高々 1 回しか元を投入しないことに注意する．よって十分大きなステージ $s' \in \omega$ をとれば，第 s' ステージ以降 $(P_i)_{i<e}$ たちは元を投入せず，したがって N_e が害されないようにできる．以下，任意に与えられた $p \in \omega$ に対して $C(p)$ を計算する方法を述べる．仮定 $C = \Phi_e^A$ より $\lim_{s\to\infty} l(e, s) = \infty$ だから，$l(e, s) > p$ となる $s \geq s'$ を実効的に計算することができる．このとき $C(p) = \Phi_{e,s}^{A_s}(p)$ であることを示したいのだが，そのためには $\Phi_{e,s}^{A_s}(p) = \Phi_e^A(p)$ が言えればよい．長さ関数 $l(e, s)$ の定義より $\forall x < l(e, s)[C_s(x) = \Phi_{e,s}^{A_s}(x)]$ なので，$l(e, s) > p$ と合わせると特に $\forall x \leq p[\Phi_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow]$ がわかる．よって $r^{\max}(e, s) \geq \varphi_{e,s}^{A_s}(p)$ であり，また s' のとり方より第 s ステージ以降 $r^{\max}(e, s)$ 以下に元が投入されることはないことから $A_s \upharpoonright r^{\max}(e, s) = A \upharpoonright r^{\max}(e, s)$ なので $\Phi_{e,s}^{A_s}(p) = \Phi_e^A(p)$ となる．　□

注意 1.5 (Soare の誤り).　上の補題 1.2 の証明において $l(e, s)$，$r(e, s)$ だけでなく $l^{\max}(e, s)$，$r^{\max}(e, s)$ を用いていることは重要である．もし $r(e, s) = \max\{\, \varphi_{e,s}^{A_s}(x) \mid x \leq l(e, s) \,\}$ と定義し，$r^{\max}(e, s)$ の代わりに

$r(e,s)$ そのものを用いることにすると，次のような不都合が起こりうる．

シナリオ 1.6. 補題 1.2 の証明と同様に十分大きなステージ s' をとる．第 $s \geq s'$ ステージにおいては $r(e,s) \geq r := \max\{\varphi_{e,s}^{A_s}(x) \mid x \leq p\}$ かつ N_e は害されないので，$x < p$ に対し $\Phi_{e,s}^{A_s}(x) = \Phi_{e,s+1}^{A_{s+1}}(x)$ となることはよい．ところが，ある $x < p$ に対して $C_s(x) \neq C_{s+1}(x)$ となってしまう可能性はある (仮に C が c.e. 集合である場合にさえ)．その場合 $l(e,s+1) < p$ となるので，もしかしたら $r(e,s+1) < r$ となってしまうかもしれない．もしそうなれば，半開区間 $(r(e,s+1), r]$ に「N_e を害さずに」元を投入することが可能になってしまう．こうなってしまえば $x \in (l(e,s+1), p]$ に対する計算 $\Phi_{e,s+1}^{A_{s+1}}(x)$ はもはや保護されず，$\Phi_{e,s+1}^{A_{s+1}}(x) \neq \Phi_{e,s+2}^{A_{s+2}}(x)$ となってしまうかもしれない．しかも，さらに $\Phi_{e,s+2}^{A_{s+2}}(x)\downarrow = C_{s+2}(x)$ などとなってしまえば，$C = \Phi_e^A$ という仮定にも矛盾しない．

このような場合には $\Phi_{e,s}^{A_s}(p) \neq \Phi_e^A(p)$ となるかもしれず，補題 1.2 は成り立たない．Soare [Soa76, Soa16] の証明はこの間違いを犯しているため，読むときは注意されたい．

補題 1.3 の証明. 補題 1.2 より $C \neq \Phi_e^A$ だから，$C(p) \neq \Phi_e^A(p)$ となるような最小の $p \in \omega$ がとれる．ステージ $s' \in \omega$ を十分大きくとれば，任意の $s \geq s'$ に対して

(a) $\forall x < p[\Phi_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow = \Phi_e^A(x)]$,
(b) $\forall x \leq p[C_s(x) = C(x)]$,
(c) N_e は第 s ステージで害されない

となるようにできる．

($\forall s \geq s'[\Phi_{e,s}^{A_s}(p)\uparrow]$ のとき). (a), (b) より任意の $s \geq s'$ に対して $l(e,s) = p = l(e,s')$ となるので $l^{\max}(e,s) = l^{\max}(e,s')$ であり，よって $\lim_{s\to\infty} l^{\max}(e,s) < \infty$ である．

($\exists s \geq s'[\Phi_{e,s}^{A_s}(p)\downarrow]$ のとき). (a), (b) より任意の $t \geq s$ について $l(e,t) \geq p$ だから，$r(e,t)$ の定義より $r(e,t) \geq \varphi_{e,t}^{A_t}(p)$ である ($r(e,t)$ は最初の**不一致**まで含めて計算を保護していたことを思い出そう)．よって，(c) よりこれ以降 $r(e,t)$ 以下に元が投入されることはないことと合わせると，$\Phi_{e,s}^{A_s}(p)\downarrow$ の計算結果は最後まで保存されて $\Phi_{e,s}^{A_s}(p) = \Phi_e^A(p)$ となることがわかる．したがって任意の $t \geq s$ に対して $\Phi_{e,t}^{A_t}(p) = \Phi_e^A(p) \neq C(p) = C_t(p)$ であるから，実際には $l(e,t) = p = l(e,s)$ であることがわかるので，$l^{\max}(e,t) = l^{\max}(e,s)$ を得る．よって $\lim_{s\to\infty} l^{\max}(e,s) < \infty$ である．

よって十分に大きなステージ $t \geq s'$ で $l^{\max}(e,t) = \lim_{s\to\infty} l^{\max}(e,s)$ となるものがとれる．各 $x \in (p, l^{\max}(e,t)]$ について，もしある $t' \geq t$ で $\Phi_{e,t'}^{A_{t'}}(x)\downarrow$ ならば $\varphi_{e,t'}^{A_{t'}}(x) \leq r(e,t')$ なので (c) より計算 $\Phi_{e,t'}^{A_{t'}}(x)\downarrow$ はその後ずっと保たれ $\Phi_{e,t'}^{A_{t'}}(x) = \Phi_e^A(x)$ となる．したがって十分大きなステージでは $r(e,s)$ は一定の値になり，よって $r^{\max}(e,s)$ も一定の値になる． □

補題 1.4 の証明. 任意に $e \in \omega$ をとる．補題 1.3 より，$r^{\max}(e) := \lim_{s\to\infty} r^{\max}(e,s)$ は有限の値になる．よって $|W_e| = \infty$ のとき，十分に大きなステージ $s \in \omega$ をとれば

- $\forall i \leq e[r^{\max}(i,s) = r^{\max}(i)]$,
- $\exists x \in \omega[x \in W_{e,s} \land x > 2e \land \forall i \leq e[x > r^{\max}(i,s)]]$,
- $(P_i)_{i<e}$ たちは第 s ステージ以降 A に元を投入することはない

となるようにできる．第 s ステージでもし $W_{e,s} \cap A_s = \emptyset$ ならば P_e が A に元を投入するので $W_e \cap A \neq \emptyset$ となる． □

最後に，A が補無限集合であることを示す．構成の途中で各 P_e は高々 1 回だけ，$x > 2e$ なる元 x を投入するので，$|A{\restriction}2e| \leq e$ となる．よって $|\overline{A}{\restriction}2e| \geq e$ だから $|\overline{A}| = \infty$ となる． □(錐回避定理の証明終わり)

Δ^0_2 錐回避定理 1.1 においては P_e は高々 1 回しか元を投入しないので，各害集合の濃度は $|I_e| < e$ となることがわかる．

2 無限害優先論法

無限害優先論法とはその名の通り，有限害優先論法を，負の要件が無限回害される可能性がある場合へと拡張した構成法である．負の要件 N_e が無限回害されるということは，すなわち N_e より優先度の高い正の要件 $(P_i)_{i<e}$ たちが元を無限回投入するということである．例えば，何か適当な計算可能関数 $g\colon \omega \to \omega$ について，要件 P_e が

$$P_e\colon |W_{g(e)} - A| < \infty$$

という形をしているとしよう．ここでさらに $W_{g(e)}$ が無限集合だったとすると，要件 P_e を達成するためには P_e は無限個の元を A に投入しなければならない．このような状況の下で，全ての要件 $(P_e)_{e\in\omega}$，$(N_e)_{e\in\omega}$ を達成することはできるだろうか．

有限害優先論法のときと決定的に異なる点のひとつは，害が無限に発生する場合には束縛関数 $r(e,s)$ が (たとえ $r(e,s) := \max\{\, \varphi^{A_s}_{e,s}(x) \mid x \leq l(e,s)\,\}$ という定義を採用したとしても) 無限大に発散しうるということである．以下のようなケースを考えてみよう．

シナリオ 2.1. 例として $W_{g(0)} = \{\, 2y \mid y \in \omega\,\}$ (偶数全体) であるとし，

$$\Phi^X_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists y \in \omega[X(2y) = 0], \\ \uparrow & \text{otherwise, i.e., } X \supseteq W_{g(0)} \end{cases}$$

であるような場合を考えよう．ここで任意のオラクル X と入力 x に対し $\Phi^X_0(x)\uparrow$ だとして，P_0 は何の束縛も受けずに好きな元を A に投入することができるものとしよう．このとき P_0 が $W_{g(0)}$ の元を A に手前から順番に投入すると仮定しても差し支えない．構成の第 s ステージにおいて $A_s = \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$ であるとすると，$\Phi^{A_s}_{1,s}(x)\downarrow = 0$ かつ $\varphi^{A_s}_{1,s}(x) = 2n + 2$ となる．定義から $\varphi^{A_s}_{1,s}(0) \leq r(1, s)$ だったので $\lim_{s\to\infty} r(1, s) = \infty$ である．その一方で，最終的には $A \supseteq W_{g(0)}$ となるので $\Phi^A_1(x)\uparrow$ が成り立つ．

このような場合には，$e \geq 2$ なる P_e については元を無限個はおろか，一つも投入できないかもしれない．正の要件 P_e が $W_{g(e)}$ の元を有限個を除いて全て投入するためには，少なくとも $\liminf_{s\to\infty} \max\{\, r(i, s) \mid i \leq e\,\} < \infty$ が成り立ってほしい．束縛関数 $r(e, s)$ が無限大に発散してしまうような事態を回避するためにはどうすればよいだろうか．ここでシナリオ 2.1 において $\Phi^A_1(x)\uparrow$ となっていることに注目しよう．計算が停止しないのだからこのとき当然 $C \neq \Phi^A_1$ であり，したがって要件 N_1 は成立している．これが意味することは「実は要件 N_1 の成立のために計算 $\Phi^{A_s}_{1,s}(x)\downarrow$ を保護する必要はなかった」ということである．したがって P_e が元を投入する余地を確保するためには，保護する必要のない計算を不必要に保護しないことが重要となる．とはいえ，計算を保護する必要があるか否かをどうやって判断すればよいのだろうか？ 例によって「最

終的に $\Phi_e^A(x)\uparrow$ となるかどうか」を判断する方法は存在しないので，代わりに「現在のところ，$\Phi_e^A(x)\uparrow$ となりそうかどうか」を検査することになる．$\Phi_{e,s}^{A_s}(x)\uparrow$ であれば保護する必要がないのは明らかだから，問題となるのはシナリオ 2.1 のように $\Phi_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow$ だが $\Phi_e^A(x)\uparrow$ となってしまうような場合である．シナリオ 2.1 において $A_s = \{0, 2, \dots, 2n\}$，$A_{s+1} = \{0, 2, \dots, 2n, 2n+2\}$ のときを考えると，$\Phi_{1,s}^{A_s}(x)\downarrow = \Phi_{1,s+1}^{A_{s+1}}(x)\downarrow$ だが $\varphi_{1,s}^{A_s}(x) \neq \varphi_{1,s+1}^{A_{s+1}}(x)$ となっている．つまり，一見すると $\Phi_{1,s}^{A_s}(x)\downarrow = \Phi_{1,s+1}^{A_{s+1}}(x)\downarrow$ なので計算が保たれているように見えるが，実際には $\varphi_{1,s}^{A_s}(x) \neq \varphi_{1,s+1}^{A_{s+1}}(x)$ なので，具体的な計算の過程は変わってしまっているということである．だから，第 s ステージにおいて $\varphi_{e,s}^{A_s}(x)$ 以下に元が投入されたなら，計算 $\Phi_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow$ は "壊れた" とみなすべきであり，したがって $\varphi_{e,s}^{A_s}(x)$ を束縛関数 $r(e,s)$ の勘定に入れるべきではない．

以上の考察をもとに「壊れていない，信頼できそうな計算結果」を表すために作られた表記法が次のハット記法である．

定義 2.2 (ハット記法 (hat convention)[*4])． 目標となる c.e. 集合 A の，第 s ステージまでに構成した部分 $(A_t)_{t\leq s}$ と，一様に計算可能な集合の列 $(C_s)_{s\in\omega}$ に対し，ハット付きの記号を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
a_s &:= \begin{cases} \min\{\, x \mid x \in A_s - A_{s \dot{-} 1} \,\} & \text{if } A_s - A_{s \dot{-} 1} \neq \emptyset, \\ s & \text{otherwise}, \end{cases} \\
\hat{\Phi}_{e,s}^{A_s}(x) &:= \Phi_{e,s}^{A_s \upharpoonright a_s}(x) \\
&= \begin{cases} \Phi_{e,s}^{A_s}(x) & \text{if } \Phi_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow \wedge \varphi_{e,s}^{A_s}(x) < a_s, \\ \uparrow & \text{otherwise}, \end{cases} \\
\hat{\varphi}_{e,s}^{A_s}(x) &:= \varphi_{e,s}^{A_s \upharpoonright a_s}(x) \\
&= \begin{cases} \varphi_{e,s}^{A_s}(x) & \text{if } \hat{\Phi}_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \\
\hat{l}(e,s) &:= \max\{\, x \in \omega \mid \forall y < x[C_s(y) = \hat{\Phi}_{e,s}^{A_s}(y)] \,\}, \\
\hat{l}^{\max}(e,s) &:= \max\{\, \hat{l}(e,t) \mid t \leq s \,\}, \\
\hat{r}(e,s) &:= \max\{\, \hat{\varphi}_{e,s}^{A_s}(x) \mid x \leq \hat{l}^{\max}(e,s) \,\}, \\
\hat{I}_{e,s} &:= \{\, x \in \omega \mid \exists v \leq s[x \leq \hat{r}(e,v) \wedge x \in A_{v+1} - A_v] \,\}, \\
\hat{I}_e &:= \bigcup_{s\in\omega} \hat{I}_{e,s}.
\end{aligned}
$$

ハット記法の定義から，任意の $x, s \in \omega$ に対し $\hat{\varphi}_{e,s}^{A_s}(x) < a_s$ や $\hat{r}(e,s) < a_s$ が成り立つ．すなわち，ハット記法の下では「害されると壁が a_s より手前まで後退する」(図 3)．

ハット記法を用いた構成において重要となるのが次のトゥルーステージである．

定義 2.3 (トゥルーステージ)． 定義 2.2 と同じ設定のもとで

$$T := \{\, t \in \omega \mid \forall s \geq t[a_t < a_s] \,\}$$

と定義し，T の元を**トゥルーステージ** (true stage) という．A が c.e. 集合であることより，T は co-c.e. 集合 (Π_1^0 集合) である．明らかに T は無限集合である．

ハット記法は，トゥルーステージにおいてみかけの計算 $\hat{\Phi}_{e,t}^{A_t}(x)$ が定義されるならば真の計算 $\Phi_e^A(x)$ と一致する，という性質をもつ．

[*4] ハットトリック (hat trick) と呼ばれることもある．スポーツにおけるハットトリックとはもちろん無関係である．

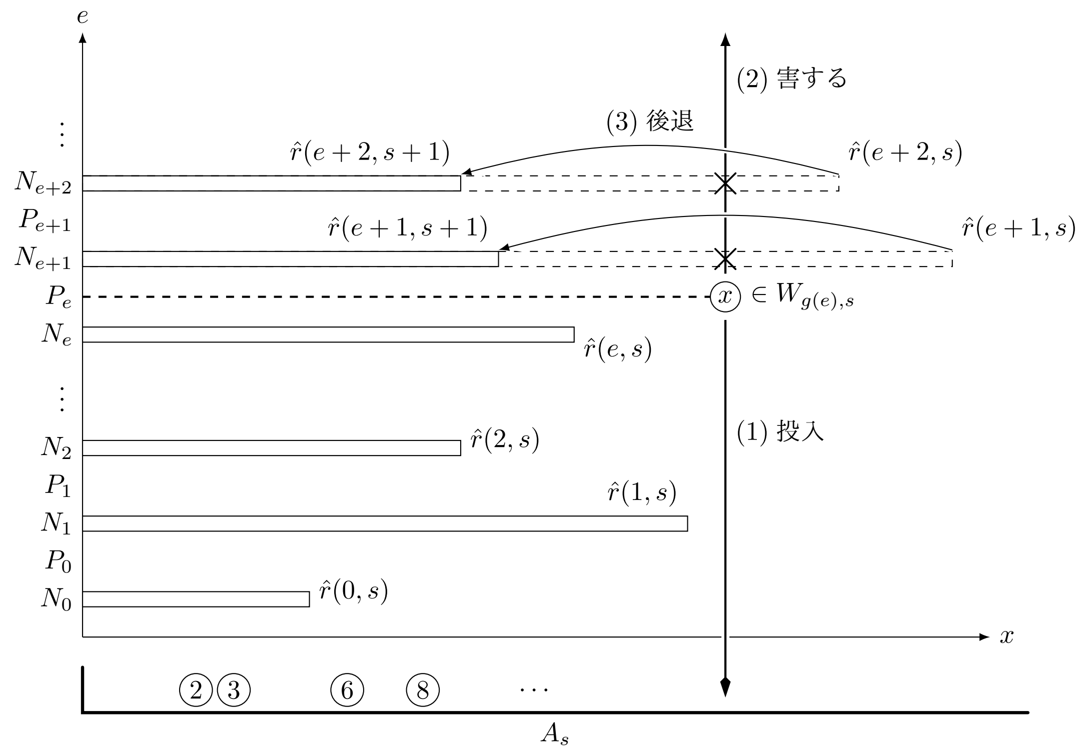

図 3　ハット記法の下での無限害優先論法による c.e. 集合 A の構成

補題 2.4.　トゥルーステージ全体の集合 T について，

$$\forall t \in T[\hat{\Phi}^{A_t}_{e,t}(x)\downarrow \implies \forall s \geq t[\Phi^A_e(x)\downarrow = \hat{\Phi}^{A_s}_{e,s}(x) \wedge \varphi^A_e(x) = \hat{\varphi}^{A_s}_{e,s}(x)]].$$

証明. $\hat{\Phi}^{A_t}_{e,t}(x)\downarrow$ より $\Phi^{A_t}_{e,t}(x)\downarrow$ かつ $\varphi^{A_t}_{e,t}(x) < a_t$ である．さらに，t がトゥルーステージであることより任意の $s \geq t$ に対し $A_s {\upharpoonright} a_t = A_t {\upharpoonright} a_t$ だから帰納的に $\hat{\Phi}^{A_s}_{e,s}(x) = \hat{\Phi}^{A_t}_{e,t}(x)$ と $\hat{\varphi}^{A_s}_{e,s}(x) = \varphi^{A_t}_{e,t}(x)$ がわかる． □

有限害優先論法における補題 1.2 に相当するものが次の害補題である．

補題 2.5 (害補題 (Injury Lemma)).　各 $e \in \omega$ について，もし $C \not\leq_{\mathrm{T}} \hat{I}_e$ ならば $C \neq \Phi^A_e$ となる．

証明. 対偶を示す．ある $e \in \omega$ について $C = \Phi^A_e$ であると仮定して $C \leq_{\mathrm{T}} \hat{I}_e$ であることを言う．以下，任意に与えられた $p \in \omega$ に対して $\hat{I}_e$ をオラクルに用いて $C(p)$ を計算する方法を述べる．いま $C = \Phi^A_e$ だから $\Phi^A_e(p)$ が計算できればよい．

有限害優先論法のときは $(P_i)_{i<e}$ たちが元を投入しなくなるまで待つ，ということができた．ところが無限害優先論法の場合には $(P_i)_{i<e}$ たちは無限に元を投入し続ける可能性がある．そこで，$\Phi^A_e(p)$ を計算するのに必要なだけの A_s の始切片 (これは p に依存する) に元が投入されなくなるまで待つことにする．いつまで待てば害が終わるかは $\hat{I}_e$ が知っている．

主張 2.6.　あるステージ $s \in \omega$ が存在して

(a) $\hat{l}(e,s) > p$,
(b) $[0, \max\{\, \varphi^{A_s}_{e,s}(x) \mid x \leq p \,\}] \subseteq A_s \cup \overline{\hat{I}_e}$

が成り立つ．

主張の証明．背理法で示す．補題の仮定 $C = \Phi_e^A$ (と $\lim_{s\to\infty} a_s = \infty$) より $\lim_{s\to\infty} \hat{l}(e,s) = \infty$ だから，あるステージ s' 以降常に (a) が成り立つ．よって仮に (a) と (b) をみたすステージ $s \in \omega$ が存在しないとすると，

$$\forall s \geq s' \exists x(s) \leq p \exists y(s) \leq \varphi_{e,s}^{A_s}(x(s)) \left[\hat{l}(e,s) > p \wedge y(s) \notin A_s \cup \overline{\hat{I}_e}\right]$$

となる．一方で $\hat{I}_e$ の定義より $\hat{I}_e \subseteq A$ であるから $\omega = A \cup \overline{\hat{I}_e}$ である．よって $\lim_{s\to\infty} y(s) = \infty$ でなければならない．したがって $\lim_{s\to\infty} \varphi_{e,s}^{A_s}(x(s)) = \infty$ となるので，ある $x \leq p$ が存在して $\lim_{s\to\infty} \varphi_{e,s}^{A_s}(x) = \infty$ となる．これは $\Phi_e^A(x)\downarrow = C(x)$ に矛盾する． □

主張の条件 (a) と (b) は $\hat{I}_e$ をオラクルに用いれば判定できるので，主張におけるステージ $s \in \omega$ を実効的に計算することができる．このとき $C(p) = \Phi_{e,s}^{A_s}(p)$ が成り立つことを示す．そのためには $\Phi_{e,s}^{A_s}(p) = \Phi_e^A(p)$ が言えればよい．ここで $r := \max\{\, \varphi_{e,s}^{A_s}(x) \mid x \leq p \,\}$ とおき，任意の $t \geq s$ に対し

$$\begin{cases} r < a_t, & \text{(1a)} \\ A_t \upharpoonright r = A_s \upharpoonright r, & \text{(1b)} \\ \forall x \leq p[\Phi_{e,t}^{A_t}(x) = \Phi_{e,s}^{A_s}(x)], & \text{(1c)} \\ \forall x \leq p[\varphi_{e,t}^{A_t}(x) = \varphi_{e,s}^{A_s}(x) \leq r], & \text{(1d)} \\ \hat{r}(e,t) \geq r & \text{(1e)} \end{cases}$$

が成り立つことを $t \geq s$ に関する帰納法で示す．まず $t = s$ の場合を考える．条件 (a) より特に $\forall x \leq p[\hat{\Phi}_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow]$ がわかるから，ハット記法の定義より各 $x \leq p$ について $\hat{\varphi}_{e,s}^{A_s}(x) = \varphi_{e,s}^{A_s}(x) < a_s$ となる．したがって r の定義から $r < a_s$ かつ $r \leq \hat{r}(e,s)$ を得る．第 t ステージで条件 (1a)–(1e) が成り立つと仮定する．$A_{t+1} = A_t$ のときは明らかだから，$A_{t+1} \neq A_t$ と仮定してよい．仮に $a_{t+1} \leq r$ だったとすると，帰納法の仮定 (1e) より $a_{t+1} \leq \hat{r}(e,t)$ だから $a_{t+1} \in \hat{I}_e$ である．さらに $a_{t+1} \notin A_t \supseteq A_s$ なので $a_{t+1} \notin A_s \cup \overline{\hat{I}_e}$ となるが，これは条件 (b) より $[0,r] \subseteq A_s \cup \overline{\hat{I}_e}$ であることに反する．よって $r < a_{t+1}$ でなければならないので $A_{t+1} \upharpoonright r = A_t \upharpoonright r$ もわかる．このことから第 $t+1$ ステージにおいても (1c)–(1e) が成り立つのは明らかであろう．以上より，条件 (1c) から $\Phi_{e,s}^{A_s}(p) = \Phi_e^A(p) = C(p)$ がわかるので，結論として $C \leq_{\mathrm{T}} \hat{I}_e$ が得られる． □(害補題の証明終わり)

次に，有限害優先論法における補題 1.3 に相当するのが次の窓補題である．

補題 2.7 (窓補題 (Window Lemma)). T を A の枚挙 $(A_s)_{s\in\omega}$ のトゥルーステージ全体の集合とする．このとき各 $e \in \omega$ について，もし $C \neq \Phi_e^A$ ならば $\lim_{t\in T} \hat{r}(e,t) < \infty$ である．よって特に $\liminf_{s\to\infty} \max\{\, \hat{r}(i,s) \mid i \leq e \,\} < \infty$ となる．

証明．仮定 $C \neq \Phi_e^A$ より，$C(p) \neq \Phi_e^A(p)$ となるような最小の $p \in \omega$ がとれる．ステージ $s' \in \omega$ を十分大きくとれば，任意の $s \geq s'$ に対して

(a) $\forall x < p[\hat{\Phi}_{e,s}^{A_s}(x)\downarrow = \Phi_e^A(x) \wedge A_s \upharpoonright \varphi_e^A(x) = A \upharpoonright \varphi_e^A(x)]$,
(b) $\forall x \leq p[C_s(x) = C(x)]$

となるようにできる．

($\forall t \geq s'[t \in T \implies \hat{\Phi}^{A_t}_{e,t}(p)\uparrow]$ **のとき**). このとき (a), (b) より $t \in T$ なる任意の $t \geq s'$ に対して $\hat{l}(e,t) = p$ となるから $\lim_{t \in T} \hat{l}^{\max}(e,t) < \infty$.

($\exists t \geq s'[t \in T \wedge \hat{\Phi}^{A_t}_{e,t}(p)\downarrow]$ **のとき**). このとき補題 2.4 より任意の $s \geq t$ に対して $\hat{\Phi}^{A_s}_{e,s}(p)\downarrow = \Phi^A_e(p)\downarrow \neq C(p)$ となるから，(a)，(b) より $\hat{l}(e,s) = p$ であるので $\lim_{t \in T} \hat{l}^{\max}(e,t) < \infty$.

いずれにせよ $\lim_{t \in T} \hat{l}^{\max}(e,t) < \infty$ だから，補題 1.3 のときと同様にして $\lim_{t \in T} \hat{r}(e,t) < \infty$ がわかる． □

3 Shoenfield の濃密補題

定義 3.1 (濃密部分集合，列ごとに計算可能な集合). 計算可能な全単射 $\langle -,- \rangle \colon \omega \times \omega \to \omega$ をひとつ固定しておく．任意の集合 $A \subseteq \omega$ と $x \in \omega$ に対し，A の「第 x 列」を $A^{(x)} := \{ z \in \omega \mid \exists y \in \omega[z = \langle x,y \rangle \in A] \}$ とおく．さらに $A^{(<x)} := \bigcup \{ A^{(z)} \mid z < x \}$ とおく．

集合 $B \subseteq \omega$ の部分集合 $A \subseteq B$ が**濃密** (thick) 部分集合であるとは，全ての $x \in \omega$ に対し $B^{(x)} - A^{(x)}$ が有限集合となることをいう．集合 $B \subseteq \omega$ が**列ごとに計算可能** (piecewise computable) であるとは，各 $x \in \omega$ に対し $B^{(x)}$ が計算可能であることをいう．

補題 3.2 (濃密補題 (Thickness Lemma), Shoenfield). 集合 C で $\emptyset <_{\mathrm{T}} C \leq_{\mathrm{T}} \emptyset'$ をみたすものと c.e. 集合 B について，全ての $e \in \omega$ について $C \not\leq_{\mathrm{T}} B^{(<e)}$ ならばある濃密 c.e. 部分集合 $A \subseteq B$ が存在して $C \not\leq_{\mathrm{T}} A$ が成り立つ.

系 3.3. 集合 C で $\emptyset <_{\mathrm{T}} C \leq_{\mathrm{T}} \emptyset'$ をみたすものと，列ごとに計算可能な c.e. 集合 B に対し，ある濃密 c.e. 部分集合 $A \subseteq B$ が存在して $C \not\leq_{\mathrm{T}} A$ が成り立つ.

証明. 極限補題より $C = \lim_{s \to \infty} C_s$ なる一様に計算可能な集合の列 $(C_s)_{s \in \omega}$ がとれる．また B の枚挙 $(B_s)_{s \in \omega}$ をとる．全ての $e \in \omega$ に対して要件

$$P_e \colon |B^{(e)} - A^{(e)}| < \infty,$$
$$N_e \colon C \neq \Phi^A_e$$

をみたすように c.e. 集合 A を構成すればよい．要件たちの間には $N_0 < P_0 < N_1 < P_1 < N_2 < \cdots$ という優先度を入れる．以下，帰納的に $(A_s)_{s \in \omega}$ を構成して $A := \bigcup_{s \in \omega} A_s$ とする．$A_0 := \emptyset$ とし，第 s ステージでは

$$\exists e \leq s[x \notin A^{(e)}_s \wedge x \in B^{(e)}_{s+1} \wedge \forall i \leq e[x > \hat{r}(i,s)]] \tag{2}$$

をみたすような $x \in \omega$ が存在するかどうかを検査する．これは $B^{(e)}_{s+1}$ が有限集合であることから実効的にできる．もしそのような x が存在するならば，最小のものをとり $A_{s+1} := A_s \cup \{x\}$ とおく．そのような x が存在しなければ $A_{s+1} := A_s$ のままにしておく.[*5]

以上の構成により全ての要件が達成されることを示す.

主張 3.4. 任意の $e \in \omega$ に対し，以下が成り立つ.

(a) $C \not\leq_{\mathrm{T}} \hat{I}_e$.
(b) N_e が成り立つ.

[*5] もちろん，(2) をみたす x を全て A_{s+1} に加えてもよい.

(c) P_e が成り立つ．

主張の証明．$e \in \omega$ に関する帰納法で示す．$e=0$ のとき，N_0 は害されることはないから $\hat{I}_0 = \emptyset$ であり，よって特に $C \not\leq_{\mathrm{T}} \hat{I}_0$ である．$C \not\leq_{\mathrm{T}} \hat{I}_e$ であると仮定する．このとき害補題 2.5 より $C \neq \Phi_e^A$ である．よって窓補題 2.7 より $\lim_{t \in T} \max\{\, \hat{r}(i,t) \mid i \leq e \,\} < \infty$ だから，構成より $|B^{(e)} - A^{(e)}| < \infty$ が成り立つ．要件 N_{e+1} を害しうるのは $(P_i)_{i<e+1}$ だけだから $\hat{I}_{e+1} \subseteq A^{(<e+1)}$ であることに注意する．さらに $\hat{I}_{e+1} \leq_{\mathrm{T}} A^{(<e+1)}$ も成り立つ．実際，入力 $x \in \omega$ に対し，

- $x \notin A^{(<e+1)}$ ならば $x \notin \hat{I}_{e+1}$，
- $x \in A^{(<e+1)}$ ならばある $s \in \omega$ について $x \in A_s^{(<e+1)}$ だから $x \in \hat{I}_{e+1} \iff x \in \hat{I}_{e+1,s}$.

いま帰納法の仮定より $(P_i)_{i \leq e}$ が全て成り立つので $|B^{(<e+1)} - A^{(<e+1)}| < \infty$ であり，したがって $B^{(<e+1)} \equiv_{\mathrm{T}} A^{(<e+1)}$ である．よって仮定 $C \not\leq_{\mathrm{T}} B^{(<e+1)}$ と合わせて $C \not\leq_{\mathrm{T}} \hat{I}_{e+1}$ を得る． □

□(濃密補題の証明終わり)

例 3.5. 上の構成の最も簡単な場合として $B = \emptyset' \times \omega$, $C = \emptyset'$ の場合を考えよう．系 3.3 よりある濃密 c.e. 部分集合 $A \subseteq \emptyset' \times \omega$ が存在して $\emptyset' \not\leq_{\mathrm{T}} A$ となる．A が濃密部分集合であることから

$$x \in \emptyset' \iff \exists y \in \omega[\langle x,y \rangle \in B] \iff \exists y \in \omega[\langle x,y \rangle \in A]$$

が成り立つ．一方で，$\emptyset' \not\leq_{\mathrm{T}} A$ ということは

$$f(x) := \begin{cases} \min\{\, y \in \omega \mid \langle x,y \rangle \in A \,\} & \text{if } \exists y \in \omega[\langle x,y \rangle \in A], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる関数 f がいかなる計算可能全域的関数によっても上から押さえられないということを意味する．

定理 3.6 (Sacks). 集合 C で $\emptyset <_{\mathrm{T}} C \leq_{\mathrm{T}} \emptyset'$ をみたすものについて，ある c.e. 集合 A が存在して $A' \equiv_{\mathrm{T}} \emptyset''$ かつ $C \not\leq_{\mathrm{T}} A$ が成り立つ．特に A は不完全 c.e. 高集合である．

証明．$\emptyset''$ は Σ_2^0 集合だから，ある計算可能関数 $h\colon \omega \to \omega$ が存在して

$$\begin{aligned} x \in \emptyset'' &\implies |W_{h(x)}| < \infty, \\ x \notin \emptyset'' &\implies W_{h(x)} = \omega \end{aligned}$$

が成り立つ (例えば [Soa16, Theorem 4.3.2] を見よ)．よって $B := \{\, \langle x,y \rangle \mid y \in W_{h(x)} \,\}$ とおくと B は列ごとに計算可能な c.e. 集合になっている．よって濃密補題の系 3.3 よりある濃密 c.e. 部分集合 $A \subseteq B$ が存在して $C \not\leq_{\mathrm{T}} A$ をみたす．A が c.e. 集合であることより $A' \leq_{\mathrm{T}} \emptyset''$ はよい．$\emptyset'' \leq_{\mathrm{T}} A'$ を示す．極限補題より $\emptyset''$ が A 計算可能関数の極限で書けることを示せばよい．実際，

$$\begin{aligned} x \in \emptyset'' &\implies |B^{(x)}| < \infty \implies |A^{(x)}| < \infty \implies \lim_{y \to \infty} A(\langle x,y \rangle) = 0, \\ x \notin \emptyset'' &\implies B^{(x)} = \omega \implies |\omega^{(x)} - A^{(x)}| < \infty \implies \lim_{y \to \infty} A(\langle x,y \rangle) = 1 \end{aligned}$$

となるので $\emptyset''(x) = \lim_{y \to \infty}(1 - A(\langle x,y \rangle))$ となる． □

系 3.7. 不完全 c.e. 高次数は無限に存在する．

証明．可算無限個の不完全 c.e. 高集合 $A^0, A^1, \dots$ であって，各 n に対し $\forall i < n[A^i \not\leq_{\mathrm{T}} A^n]$ をみたすものを帰納的に構成する．ただし，これまでの構成では不完全 c.e. 高次数が少なくとも 2 つあることしか言えないので，与えられた有限個の錐を全て回避するように構成を修正する．具体的には，与えられた有限個の c.e. 集合 $C^0, C^1, \dots, C^n$ に対し，$\hat{l}(e,s) = \max\{\, x \in \omega \mid \exists i \leq n \forall y < x[\hat{\Phi}^{A_s}_{e,s}(y){\downarrow} = C^i_s(y)]\,\}$ とおけば同様にして証明できる． $\square$

参考文献

[DH10] R. G. Downey, D. R. Hirschfeldt, *Algorithmic Randomness and Complexity*, Springer, 2010.

[Kih08] 木原貴行 (2008), Π^0_1 問題の解答不可能性の次数構造は稠密か？, ラムダ計算と論理の晩夏セミナー, `http://komoriyuichi.web.fc2.com/symposium/kihara_200809.pdf`.

[Soa76] R. I. Soare, The Infinite Injury Priority Method, *J. Symb. Logic* **41** no. 2 (1976) 513–530, `https://doi.org/10.2307/2272252`.

[Soa16] R. I. Soare, *Turing Computability: Theory and Applications*, Springer, 2016.

[y.19] y., Friedberg-Muchnik の定理と有限害優先論法, 関東すうがく徒のつどい, 2019, `http://iso.2022.jp/math/tsudoi/12/slide.pdf`.

変更履歴

2020/03/08　公開