アティマク演習問題解答

y.*

2017 年 6 月 18 日

最終更新日: 2019 年 2 月 18 日

概要

Atiyah-MacDonald「可換代数入門」[1] の演習問題の解答を自分用にまとめたものです．[2] を大いに参考にしました．

記号

- 環 A の単元全体を $A^\times$ で表す．
- 環 A の冪零元根基を $\mathfrak{N}$，Jacobson 根基を $\mathfrak{R}$ で表す．環を明示するときは $\mathfrak{N}_A$ などと書く．
- 環 A とそのイデアル I に対し，剰余環 A/I における $x \in A$ の同値類 $x+I$ を $\overline{x}$ で表す．
- イデアル $\mathfrak{a}$ の根基 $r(\mathfrak{a})$ を $\sqrt{\mathfrak{a}}$ で表す．
- 集合 X と Y の差集合 $X - Y$ を $X \setminus Y$ で表す．
- 位相空間 X と Y が位相同型であることを $X \approx Y$ で表す．
- 環 A や加群 M の単位元を，環や加群を明示して $0_A, 1_A, 0_M$ などと書くことがある．
- 集合 X 上の恒等写像を $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}, 1$ などで表す．

特に断らない限り，「問題 n」と書いたら同じ章の問題を指す．

目次

---

* http://iso.2022.jp/

1 環とイデアル

1. $x^n=0$ であるとする．$y:=-x$ とおくと $y^n=0$ であるから $1=1-y^n=(1-y)(1+y+\cdots+y^{n-1})$ より $1+x=1-y\in A^\times$. また $u\in A^\times$ に対し，$u^{-1}x$ も冪零元だから今示したことより $u+x=u(1+u^{-1}x)\in A^\times$.

2. i) $(\Longrightarrow)$ $n>0$ としてよい．f の逆元を $g=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ とする．$fg=1$ の 0 次の項を比較して $a_0b_0=1$ より $a_0,b_0\in A^\times$. $r=0,\ldots,m$ に対し $a_n^{r+1}b_{m-r}=0$ であることを r に関する帰納法で示す．$r=0$ のとき，$fg=1$ の最高次係数は $a_nb_m=0$. $r-1$ 以下で正しいと仮定する．$m+n-r$ 次の係数を見ると

$$\begin{aligned}0&=a_n^r\left(\sum_{i+j=m+n-r}a_ib_j\right)\\&=\sum_{\substack{i+j=m+n-r\\ j\le m-r}}a_n^ra_ib_j &&(帰納法の仮定より\ j>m-r\implies a_n^rb_j=0)\\&=\sum_{k=0}^{m-r}a_n^ra_{m+n-r-k}b_k\\&=a_n^ra_nb_{m-r} &&(m+n-r-k\le n\iff k\ge m-r)\\&=a_n^{r+1}b_{m-r}.\end{aligned}$$

よって特に $r=m$ のとき $a_n^{m+1}b_0=0$ で，$b_0\in A^\times$ より $a_n^{m+1}=0$. よって a_n は A の冪零元であり，a_nx^n は $A[x]$ の冪零元である．よって問題 1 より $f-a_nx^n=a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ は $A[x]$ の単元である．以下同様にして $a_{n-1},\ldots,a_1$ は A の冪零元である．

$(\Longleftarrow)$ $a_0\in A^\times$ より $a_0\in A[x]^\times$ で, $a_1,\ldots,a_n$ が A の冪零元なのでその一次結合 $a_1x+\cdots+a_nx^n$ は $A[x]$ の冪零元である．よって問題 1 から $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in A[x]^\times$.

ii) $(\Longrightarrow)$ f が冪零元だから問題 1 より $1+f$ は単元であり，よって i) から $a_1,\ldots,a_n$ は A の冪零元である．$f^m=0$ であるとすれば定数項は $a_0^m=0$.

$(\Longleftarrow)$ $a_0,\ldots,a_n$ が A の冪零元なのでその一次結合 $f=a_0+\cdots+a_nx^n$ は $A[x]$ の冪零元である．

iii) $(\Longrightarrow)$ $g=b_0+\cdots+b_mx^m$ を，$fg=0$ となる $A[x]$ の 0 でない元のうち次数が最小のものとする．$fg=0$ の最高次係数 $a_nb_m=0$ より $\deg a_ng<m$ となるから m の最小性より $a_ng=0$. よって $0=fg=(a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})g$ の最高次係数 $a_{n-1}b_m=0$ より $a_{n-1}g=0$ となる．以下同様にして $a_ng=\cdots=a_0g=0$ となるので 0 次の係数を見れば $b_0f=0$.

(⟸)　明らか.

iv) $f \in A[x]$ の係数が生成するイデアルを $I(f)$ で表す.[*1]

(⟹)　fg の k 次の係数は $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ だから $I(fg) \subseteq I(f), I(fg) \subseteq I(g)$. よって $I(fg) = (1)$ ならば $I(f) \supseteq I(fg) = (1)$，同様に $I(g) = (1)$.

(⟸)　$I(f) = I(g) = (1), I(fg) \subsetneq (1)$ であるとする．$I(fg) \subseteq \mathfrak{m} \subsetneq (1)$ なる極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとる．$\mathfrak{m} \subsetneq I(f) = I(g)$ より $a_i, b_j \notin \mathfrak{m}$ となる a_i, b_j が存在するので，そのうち i, j が最小であるものを a_s, b_t とする．このとき fg の $s+t$ 次の係数 $c = \sum_{i+j=s+t} a_i b_j$ について，s, t の最小性から $a_s b_t$ 以外は $a_i b_j \in \mathfrak{m}$ であり，$\mathfrak{m}$ は素イデアルでもあるから $a_s b_t \notin \mathfrak{m}$ であるので $c \notin \mathfrak{m} \supseteq I(fg) \ni c$ となり矛盾.

3.　i)「$f \in A[x_1, \ldots, x_r]$ が単元 $\iff$ f の定数項が A の単元で，それ以外の係数は A の冪零元である」ことを示す.

(⟹)　変数の個数 r に関する帰納法で示す．$r = 1$ のときは問題 2 で示した．r まで正しいと仮定する．$f = a_0 + a_1 x_{r+1} + \cdots + a_n x_{r+1}^n \in A[x_1, \ldots, x_r][x_{r+1}]$ とする．$r = 1$ の場合より f が単元なら a_0 が $A[x_1, \ldots, x_r]$ の単元かつ $a_1, \ldots, a_n$ が $A[x_1, \ldots, x_r]$ の冪零元である．よって帰納法の仮定から a_0 の定数項は A の単元であり，a_0 の非定数項の係数は A の冪零元である．$a_1, \ldots, a_n$ の全ての係数が冪零元であることは次の ii) からわかる.

(⟸)　1 変数の場合と同様.

ii)「f が $A[x_1, \ldots, x_r]$ の冪零元 $\iff$ f のすべての係数が A の冪零元である」ことが，1 変数の場合と全く同様にしてわかる.

iii) (⟹)　$f \in A[x_1, \ldots, x_r]$ を零因子とする．$A[x_1, \ldots, x_{r-k}]$ の元 $g \neq 0$ で $gf = 0$ となる g が存在することを k に関する帰納法で示す．$k = 1$ のときは $f \in A[x_1, \ldots, x_{r-1}][x_r]$ と見ることで $r = 1$ の場合に帰着される．k で正しいと仮定する．帰納法の仮定から存在する $A[x_1, \ldots, x_{r-k}]$ の元 $g \neq 0$ で $gf = 0$ なるもののうち，x_{r-k} に関する次数が最小のものをとる．1 変数の場合と全く同様の議論により g の x_{r-k} に関する次数は 0 であることがわかり，$g \in A[x_1, \ldots, x_{r-k-1}]$ を得る．$k = r$ とすれば $g \in A$.

(⟸)　明らか.

iv) 問題 2 と同様に，$f \in A[x_1, \ldots, x_r]$ の係数が生成するイデアルを $I(f)$ で表す．「$I(fg) = (1) \iff I(f) = I(g) = (1)$」を示す.

(⟹)　1 変数の場合と同様.

(⟸)　$I(f) = I(g) = (1), I(fg) \subsetneq (1)$ であるとする．極大イデアル $\mathfrak{m} \supset I(fg)$ をとる．$\mathfrak{m} \subsetneq I(f) = I(g)$ より $a_\lambda, b_\mu \notin \mathfrak{m}$ となる a_λ, b_μ が存在するので (λ, μ は multi-index)，そのうち辞書式順序で最小のものを a_α, b_β とする．このとき fg の $\alpha + \beta$ 次の係数 $c = \sum_{\lambda+\mu=\alpha+\beta} a_\lambda b_\mu$ について，α, β の最小性から a_α, b_β 以外は $a_\lambda b_\mu \in \mathfrak{m}$ であり，$\mathfrak{m}$ は素イデアルでもあるから $a_\alpha b_\beta \notin \mathfrak{m}$ であるので $c \notin \mathfrak{m} \supseteq I(fg) \ni c$ となり矛盾.

4. $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}$ を示す.

($\subseteq$)　任意に $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathfrak{R}$ をとると，命題 1.9 より $1 + f \cdot x$ は $A[x]$ の単元だから問題 2-ii) により $a_0, \ldots, a_n$ は A の冪零元である．よって $f \in \mathfrak{N}$.

($\supseteq$)　極大イデアルは素イデアルだから命題 1.8 より直ちにわかる.

[*1] 独語の der Inhalt のつもり．(9 章の問題では content の頭文字 $c(f)$ を用いている．)

5. i) $(\Longrightarrow)$　$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ によって $fg = 1$ であるとすれば $a_0 b_0 = 1$.

$(\Longleftarrow)$　$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とし，$fg = 1$ となるように係数 b_n を数学的帰納法 (累積帰納法) によって定義する．$b_0 := a_0^{-1}$ とおく．fg の $n \geq 1$ 次の係数 $a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$ は 0 でなければならないから $b_n := -a_0^{-1}(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1})$ とするしかないが，このように g を定めると $fg = 1$ となるのでよい．

ii) $f^m = 0$ であるとすれば $a_0^m = 0$. よって $f - a_0 = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ も冪零元だから特に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ は冪零元である．したがって帰納的にすべての n について $a_n = 0$.

しかし，例えば $A := \mathbb{Q}[t_0, t_1, t_2, \ldots] / \left((t_0^2, t_1^3, t_2^4, \ldots) + \sum_{i \neq j} (t_i t_j) \right)$, $f := t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \cdots \in A[[x]]$ とおくと f はすべての係数が冪零元だが，任意の n について $f^n = t_0^n + t_1^n x^n + t_2^n x^{2n} + \cdots$ であり $t_n^n \neq 0$ だから f は冪零元ではない．

iii) 命題 1.9 を用いて示す．

$(\Longrightarrow)$　任意の $y \in A \subseteq A[[x]]$ に対して $1 - fy$ は $A[[x]]$ の単元だから，i) より $1 - a_0 y$ は A の単元である．

$(\Longleftarrow)$　任意の $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in A[[x]]$ に対し，$1 - a_0 b_0$ は A の単元であるから i) より $1 - fg$ も $A[[x]]$ の単元である．

iv) $\mathfrak{m} + (x) = (1)$ であったとするとある $f \in \mathfrak{m}, g \in A[[x]]$ によって $f + g \cdot x = 1$ と書けるが，i) より f が単元となってしまい矛盾する．よって $x \in \mathfrak{m}$ だから $A + \mathfrak{m} = A[[x]]$ である．このとき第 2 同型定理から $A[[x]]/\mathfrak{m} \cong A/\mathfrak{m}^c$ なので左辺が体なら右辺も体である．この同型は $\overline{f(x)} \mapsto \overline{f(0)}$ で与えられるから，任意の $f(x) \in A[[x]]$ に対して $f(x) \in \mathfrak{m} \iff f(0) \in \mathfrak{m}^c$ となり，よって $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^c + (x)$.

v) $A[[x]] \twoheadrightarrow A[[x]]/(x) \cong A$ によって素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq A$ を引き戻した素イデアル $\mathfrak{p} + (x) \subseteq A[[x]]$ の縮約は再び $\mathfrak{p}$ となる．

6. $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$ は問題 4 で既に示した．任意に $x \notin \mathfrak{N}$ をとると，$(x) \not\subseteq \mathfrak{N}$ だから仮定よりある $a \in A$ が存在して ax は冪等元となる．このとき $(1 - ax)ax = 0$ となるから $1 - ax$ は非単元で，よって命題 1.9 から $x \notin \mathfrak{R}$.

7. $\mathfrak{p} \subseteq A$ を素イデアルとし，任意に $x \notin \mathfrak{p}$ をとる．仮定よりある $n > 1$ が存在して $x^n = x$ となるから $x(x^{n-1} - 1) = 0 \in \mathfrak{p}$ となる．今 $x \notin \mathfrak{p}$ だから $x^{n-1} - 1 \in \mathfrak{p}$ であり，したがって $\overline{x}$ は $A/\mathfrak{p}$ における単元だから $A/\mathfrak{p}$ は体である．

8. A の素イデアル全体の集合を Σ とおく．定理 1.3 より $A \neq 0$ は極大イデアルをもつので $\Sigma \neq \emptyset$. Σ が包含関係の逆順序に関して帰納的順序集合であることを言えば十分である．任意に全順序部分集合 $\{\mathfrak{p}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \Sigma$ をとる．$\mathfrak{p} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$ は明らかにイデアルであり，$x, y \notin \mathfrak{p}$ とするとある $\lambda, \mu \in \Lambda$ が存在して $x \notin \mathfrak{p}_\lambda, y \notin \mathfrak{p}_\mu$ となる．よって $xy \notin \min\{\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu\} \supseteq \mathfrak{p}$ となるから $\mathfrak{p}$ は素イデアルである．

9. $(\Longrightarrow)$　命題 1.14 より $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$.

$(\Longleftarrow)$　$\mathfrak{a} = \bigcap_\lambda \mathfrak{p}_\lambda$ だとすると $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\bigcap_\lambda \mathfrak{p}_\lambda} \subseteq \bigcap_\lambda \sqrt{\mathfrak{p}_\lambda} = \bigcap_\lambda \mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{a}$. *2

10. i) $\Longrightarrow$ iii)　唯一つの素イデアルは極大イデアルであり，それは命題 1.8 から $\mathfrak{N}$ である．

iii) $\Longrightarrow$ ii)　任意の $x \notin \mathfrak{N}$ は $A/\mathfrak{N}$ において単元だからある $y \in A$ が存在して $xy - 1$ は冪零元である．したがって問題 1 より $xy = 1 + (xy - 1)$ は A の単元だから x もそうである．

*2 一般のイデアルに対しては $\sqrt{\bigcap_\lambda \mathfrak{a}_\lambda} \neq \bigcap_\lambda \sqrt{\mathfrak{a}_\lambda}$ である．(問題の証明にはこの方向だけあれば十分である．) 例えば $A = \mathbb{Z}, \mathfrak{a}_n = 2^n\mathbb{Z}$ とおけば反例になる．

ii) $\Longrightarrow$ i)　非単元の全体が $\mathfrak{N}$ となり，これは極大ゆえ唯一の素イデアルである．

11. i) $2x = (1 + (-1)^2)x = (1-1)x = 0$.

    ii) 任意の $x \in A$ について $x^2 = x$ より $x(x-1) = 0 \in \mathfrak{p}$ だから $x \in \mathfrak{p}$ または $x - 1 \in \mathfrak{p}$ で，これは $A/\mathfrak{p}$ において $\overline{x} = 0$ または $\overline{x} = 1$ であることを意味する．[*3]

    iii) 生成元が 2 個の場合にのみ示せば十分である．イデアル $(x, y) \subseteq A$ に対し，$(x, y) = (x + xy + y)$ を示す．[*4] $x + xy + y \in (x, y)$ は明らか．$x(x + xy + y) = x + xy + xy = x$ より $x \in (x + xy + y)$ となる．y についても同様である．

12. 仮に x を 0 でも 1 でもない冪等元とすると，$x(x-1) = 0$ より x と $x - 1$ はともに非単元となるから唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に含まれるがこれは $1 \notin \mathfrak{m}$ に矛盾．

13. 仮に $1 \in \mathfrak{a}$ であったとすると，ある有限個の $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{a}$ と $g_1, \ldots, g_n \in A$ が存在して $g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n = 1$ となる．x_{f_i} を x_i と書くことにすると，このとき $x_1, \ldots, x_n$ 以外の変数には 1 を代入することで $g_1, \ldots, g_n$ には $x_1, \ldots, x_n$ 以外の変数は現れないとしてよい．$f_1 \cdots f_n$ の K 上の分解体 L をとり，f_i の L における根の 1 つを α_i とする．ここで代入写像 $K[x_1, \ldots, x_n] \to L; x_i \mapsto \alpha_i$ の核 $\mathfrak{b}$ を考えると，$g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n \in \mathfrak{b} \not\ni 1$ となり矛盾．[*5]

14. まず $(0) \in \Sigma$ ゆえ $\Sigma \neq \emptyset$ である．Σ が帰納的順序集合であることは明らか．$\mathfrak{p}$ を Σ の極大元の 1 つとする．$x, y \notin \mathfrak{p}$ とすると，$\mathfrak{p}+(x)$ と $\mathfrak{p}+(y)$ は零因子でない元を含むから，ある $p, q \in \mathfrak{p}$ と $a, b \in A$ が存在して $p+ax$ と $q+by$ は零因子ではない．よってその積 $(p+ax)(q+by) = (pq+pby+qax)+abxy \in \mathfrak{p}+(xy)$ も零因子ではないので $xy \notin \mathfrak{p}$. また同様にして任意の零因子 $x \in A$ に対し $(x) \in \Sigma$ を含む極大元の存在が言えるので，零因子全体は素イデアルの和集合である．

15. i) $E \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ だから $V(E) \supseteq V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ は明らか．$\mathfrak{p} \supseteq E$ であったとすると $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ であり，任意に $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ をとるとある $n \geq 1$ が存在して $f^n \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ となる．$\mathfrak{p}$ は素イデアルだから $f \in \mathfrak{p}$ であり，よって $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ だから $V(E) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

    ii) 任意のイデアルは 0 を含むから $V(0) = X$ であり，素イデアルは (1) ではないから $V(1) = \emptyset$.

    iii) $\mathfrak{p} \in V(\bigcup_{i \in I} E_i) \iff \bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \mathfrak{p} \iff$ すべての $i \in I$ に対し $E_i \subseteq \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i)$.

    iv) $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ だから $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$ は明らか．$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$ とすると，ある $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$ が存在して $x, y \notin \mathfrak{p}$ となるから $\mathfrak{ab} \ni xy \notin \mathfrak{p}$ ゆえ $V(\mathfrak{ab}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

16.
    - $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{\,(p) : p \text{ は素数}\,\}$. (図 1)
      (0) は任意の非空開集合に含まれるので，“すべての点の近くにある” と思うことができる．
    - $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}) = \{(0)\}$.
    - $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(0)\} \cup \{\,(x - a) : a \in \mathbb{C}\,\}$.
      $\mathbb{C}[x]$ は PID で，$\mathbb{C}$ は代数閉体だから既約多項式は 1 次式のみである．
    - $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x]) = \{(0)\} \cup \{\,(x - a) : a \in \mathbb{R}\,\} \cup \{\,(x^2 + bx + c) : b, c \in \mathbb{R}, b^2 - 4c < 0\,\}$.
      代数学の基本定理より $\mathbb{R}[x]$ の任意の元は高々 2 次の多項式の積に分解される．複素共役の区別がないので，おおよそ $\{\, z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \geq 0 \,\}$ に対応すると思うことができる．
    - $$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x]) = \{(0)\} &\cup \{\,(f) : f \text{ は既約原始多項式}\,\} \cup \{\,(p) : p \text{ は素数}\,\} \\ &\cup \{\,(p, f) : p \text{ は素数で } f \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ 上既約な多項式}\,\}.\end{aligned} \quad (\text{図 } 2)$$

[*3] $\mathfrak{p}$ が極大であること自体は問題 7 からもわかる．

[*4] 例えば集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ に加法・乗法をそれぞれ対称差・共通部分で定めると Boole 環になる．このとき $x \in \mathcal{P}(X)$ で生成される単項イデアルは x に包含される部分集合全体 $(x) = \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ であり，$x + xy + y = x \cup y$ である．

[*5] この証明は永田 [4] を参考にした．

包含写像 $i\colon \mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}[x]$ によって写像 $f\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x])\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z});\mathfrak{p}\mapsto i^{-1}(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}$ ができる．$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ の各点におけるファイバーに分解して考える: $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x])=f^{-1}((0))\cup\bigcup_{p\colon 素数}f^{-1}(p\mathbb{Z})$. まず $\mathfrak{p}\in f^{-1}((0))\iff\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}=\{0\}$ であるから，積閉集合 $S:=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ とおけば命題 3.11-iv) より $f^{-1}((0))$ の元は $\operatorname{Spec}(S^{-1}\mathbb{Z}[x])=\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[x])$ の元に 1 対 1 に対応する．$\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[x])$ の元は (0) または既約多項式 f で生成される単項イデアル $f\mathbb{Q}[x]$ であり，$f\mathbb{Q}[x]$ に対応する $\mathbb{Z}[x]$ の素イデアルは f の係数の分母を払った原始多項式で生成されるイデアル $f\mathbb{Z}[x]$ である．次に $\mathfrak{p}\in f^{-1}(p\mathbb{Z})\iff\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}\iff\mathfrak{p}\supseteq p\mathbb{Z}[x]$ であるから命題 1.1 より $f^{-1}(p\mathbb{Z})$ の元は $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x]/p\mathbb{Z}[x])\cong\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[x])$ の元と 1 対 1 に対応する．$\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[x])$ の元は (0) または $\mathbb{F}_p$ 上で既約な多項式 f で生成される単項イデアル $f\mathbb{F}_p[x]$ であり，(0) には $p\mathbb{Z}[x]\in\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ が対応し，$f\mathbb{F}_p[x]$ には $p\mathbb{Z}[x]+f\mathbb{Z}[x]\in\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ が対応する．[*6]

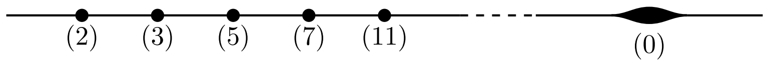

図 1 Spec($\mathbb{Z}$)

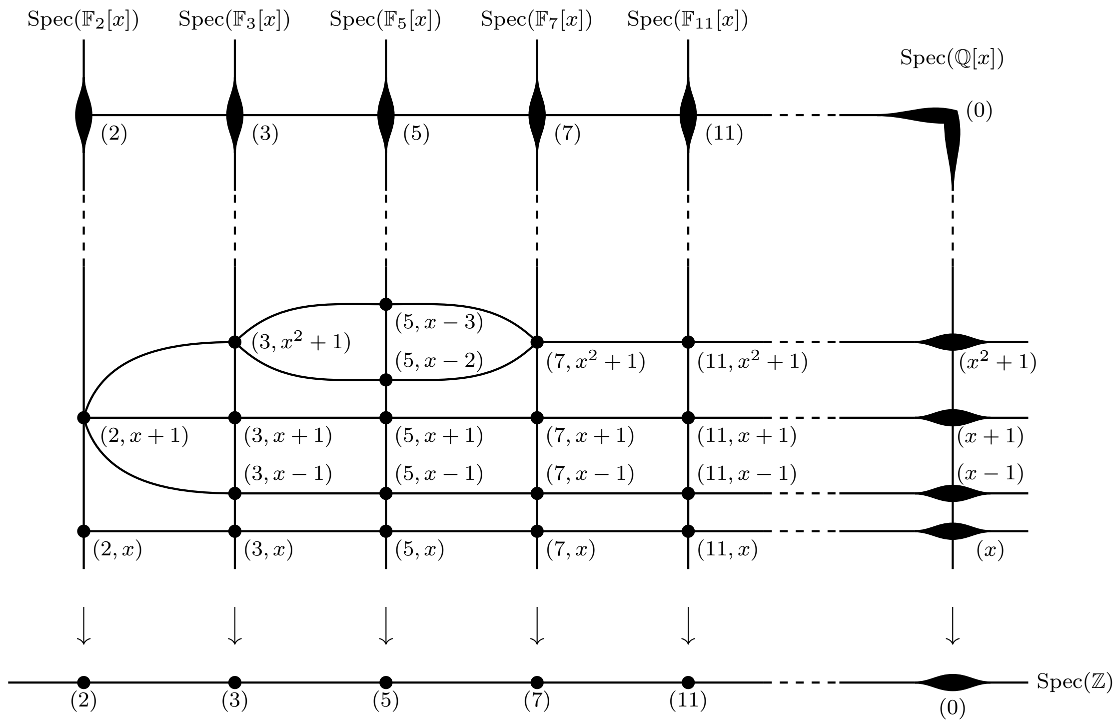

図 2 Spec($\mathbb{Z}[x]$) ([6] を参考に作成)

17. 任意の開集合はある $E\subseteq A$ により $X\setminus V(E)$ と書くことができ，$X\setminus V(E)=X\setminus\bigcap_{f\in E}V(f)=\bigcup_{f\in E}(X\setminus V(f))=\bigcup_{f\in E}X_f$ であるから $(X_f)_{f\in A}$ は開基である．

i) $X_f\cap X_g=(X\setminus V(f))\cap(X\setminus V(g))=X\setminus(V(f)\cup V(g))=X\setminus V(fg)=X_{fg}$ (問題 15-iv)).

ii) $X_f=\emptyset\iff V(f)=X\iff$ 任意の $\mathfrak{p}\in X$ に対し $f\in\mathfrak{p}\iff f\in\bigcap_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p}=\mathfrak{N}$ (命題 1.8).

[*6] この議論は Liu [5, Example 1.8, page 28] を参考にした．

iii) $X_f = X \iff V(f) = \emptyset \iff$ 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対し $f \notin \mathfrak{p} \iff f \in A^\times$ (系 1.5).

iv) $V(f) = V(g) \iff \bigcap_{\mathfrak{p} \ni f} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \ni g} \mathfrak{p} \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ (命題 1.14).

v) 必要なら開被覆を細分することで，開被覆は開基からなると仮定してよい．$\bigcup_{f \in E} X_f = X$ であるとする．補集合をとると $V(E) = \emptyset$ であるから E が生成するイデアルは 1 を含む．よってある $f_1, \ldots, f_n \in E$ と $g_1, \ldots, g_n \in A$ が存在して $g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n = 1$ となるから $(f_1, \ldots, f_n) = (1)$ となり，有限部分被覆 $X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n} = X$ を得る．[*7]

vi) $X_f \subseteq \bigcup_{g \in E} X_g$ であるとする．補集合をとると $V(f) \supseteq V(E)$ だから，E が生成するイデアルを $\mathfrak{a}$ とおくと命題 1.14 より $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ である．よってある $g_1, \ldots, g_n \in E, h_1, \ldots, h_n \in A, m \geq 1$ が存在して $f^m = h_1 g_1 + \cdots + h_n g_n$ となるから $f \in \sqrt{(g_1, \ldots, g_n)}$ である．よって $V(f) \supseteq V((g_1, \ldots, g_n))$ より有限部分被覆 $X_f = X_{g_1} \cup \cdots \cup X_{g_n}$ を得る．[*8]

vii) 問題文の正しい訳は「X の開集合が準コンパクトであるための必要十分条件は，X_f の形の有限個の和集合になることである．」である．[*9](v) より X は準コンパクトだから X は常に X_f の形の有限個の和集合になる．) 準コンパクトならば開基 X_f の有限和で書けることは明らか．逆は一般に準コンパクト集合の有限和も準コンパクトになることからわかる．

18. i) ii) より，x が閉点 $\iff \{x\} = \overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x) \iff \mathfrak{p}_x$ は極大イデアル．

ii) まず明らかに $x \in V(\mathfrak{p}_x)$ であり，さらに $x \in V(E)$ なる $E \subseteq A$ を任意にとると $E \subseteq \mathfrak{p}_x$ ゆえ $V(E) \supseteq V(\mathfrak{p}_x)$ となるので $V(\mathfrak{p}_x)$ は $\{x\}$ を含む最小の閉集合であるから $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$.

iii) ii) より $y \in \overline{\{x\}} \iff y \in V(\mathfrak{p}_x) \iff \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.

iv) $x \neq y$ とする．$\mathfrak{p}_x \not\subseteq \mathfrak{p}_y$ として一般性を失わない．$\mathfrak{p}_x \ni f \notin \mathfrak{p}_y$ なる f をとれば $x \in V(f) \not\ni y$.

19. $A = 0$ のときは明らかだから $A \neq 0$ としてよい．$\mathrm{Spec}(A)$ が既約であることは $\mathrm{Spec}(A)$ の任意の 2 つの空でない開基が交わりを持つことと同値であり，これは問題 17-i) より $X_f, X_g \neq \emptyset$ ならば $X_{fg} \neq \emptyset$ であることと同値である．さらにこれは問題 17-ii) より $f, g \notin \mathfrak{N}$ ならば $fg \notin \mathfrak{N}$ であることと同値である．

20. i) $U \cap \overline{Y}, V \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ なる X の開集合 U, V を任意にとる．このとき，仮に $U \cap Y = \emptyset$ であるとすれば $Y \subseteq X \setminus U$ より $\overline{Y} \subseteq X \setminus U$ となるから $U \cap \overline{Y} = \emptyset$ となって矛盾する．よって $U \cap Y \neq \emptyset$ であり，同様に $V \cap Y \neq \emptyset$ である．仮定より Y は既約だから $\emptyset \neq U \cap V \cap Y \subseteq U \cap V \cap \overline{Y}$.

ii) $Y \subseteq X$ を既約部分空間としたとき，Y を含む X の既約部分集合全体 Σ が帰納的順序集合であることを示せば十分である．まず $Y \in \Sigma$ より $\Sigma \neq \emptyset$ である．任意の全順序部分集合 $\{Z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \Sigma$ に対して，仮に $Z := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ が既約でなかったとすると X のある開集合 U, V が存在して $U \cap Z, V \cap Z \neq \emptyset$ かつ $U \cap V \cap Z = \emptyset$ となる．このときある $\lambda, \mu \in \Lambda$ が存在して $U \cap Z_\lambda, V \cap Z_\mu \neq \emptyset$ だから $\tilde{Z} := \max\{Z_\lambda, Z_\mu\}$ とおけば $U \cap \tilde{Z}, V \cap \tilde{Z} \neq \emptyset$ かつ $U \cap V \cap \tilde{Z} \subseteq U \cap V \cap Z = \emptyset$ となり $\tilde{Z}$ の既約性に矛盾する．

iii) $Y \subseteq X$ を既約成分とすると i) より $\overline{Y}$ も既約だから極大性より $\overline{Y} = Y$ となり Y は閉集合である．また任意の $x \in X$ に対し $\{x\}$ は明らかに既約だから，ii) よりある極大な既約部分空間に含まれるので X は既約成分で被覆される．Hausdorff 空間の 2 点以上からなる部分集合は既約でないから，Hausdorff 空間の既約成分は 1 点集合である．

[*7] 邦訳 [1] では quasi-compact に擬コンパクトという訳語が当てられているが，普通は quasi-compact は準コンパクトと訳す．位相空間 X が擬コンパクト (pseudocompact) とは任意の連続関数 $f \colon X \to \mathbb{R}$ が有界になることを言う．

[*8] 命題 3.11-iv) より $X_f \cong \mathrm{Spec}(A_f)$ であることを用いると v) から直ちにわかる．

[*9] 原著では “An open subset of X is quasi-compact if and only if it is a finite union of sets X_f.” となっている．

iv) $A=0$ のときは示すべきことは何もないので $A\neq 0$ としてよい．$Y\subseteq X$ を既約成分とすると 1 点集合は既約だから $Y\neq\emptyset$ である．iii) より Y は閉集合だから問題 15-i) よりあるイデアル $\mathfrak{a}\subseteq A$ によって $Y=V(\mathfrak{a}),\sqrt{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}$ となる．仮に $\mathfrak{a}$ が素イデアルでないとするとある $f,g\in A$ が存在して $f,g\notin\mathfrak{a},fg\in\mathfrak{a}$ となる．問題 9 より $f,g\notin\mathfrak{a}=\bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}}\mathfrak{p}$ だからある素イデアル $\mathfrak{p}_x,\mathfrak{p}_y\supseteq\mathfrak{a}$ があって $f\notin\mathfrak{p}_x,g\notin\mathfrak{p}_y$ となるので $x\in X_f\cap Y\neq\emptyset,y\in X_g\cap Y\neq\emptyset$ である．また $fg\in\mathfrak{a}$ より任意の $z\in Y$ について $\mathfrak{p}_z\notin X_{fg}$ だから $X_{fg}\cap Y=\emptyset$ である．よって問題 17-i) から $(X_f\cap Y)\cap(X_g\cap Y)=X_{fg}\cap Y=\emptyset$ となり Y の既約性に矛盾するので $\mathfrak{a}$ は素イデアル $\mathfrak{p}$ である．ここで仮に $\mathfrak{p}$ が極小でないとするとさらに小さい素イデアル $\mathfrak{q}\subsetneq\mathfrak{p}$ がとれ，$V(\mathfrak{q})\ni\mathfrak{q}\notin V(\mathfrak{p})$ だから $V(\mathfrak{q})\supsetneq V(\mathfrak{p})$ である．したがって，一般に素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し $V(\mathfrak{p})$ が既約であることを示せば証明が終わり，さらに問題文の逆向きも同時に証明される．X の開基 X_f,X_g で $X_f\cap V(\mathfrak{p}),X_g\cap V(\mathfrak{p})\neq\emptyset$ なるものを任意にとる．ここで $X_f\cap V(\mathfrak{p})=\{\mathfrak{q}\in X:f\notin\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{p}\}$ だから特に $f\notin\mathfrak{p}$ であり，同様にして $g\notin\mathfrak{p}$ である．$\mathfrak{p}$ は素イデアルだから $fg\notin\mathfrak{p}$ であり，したがって $\mathfrak{p}\in X_{fg}\cap V(\mathfrak{p})$ だから問題 17-i) より $X_f\cap X_g\cap V(\mathfrak{p})\neq\emptyset$. *10

21. i) $\mathfrak{q}\in{\phi^*}^{-1}(X_f)\iff\phi^*(\mathfrak{q})=\phi^{-1}(\mathfrak{q})\in X_f\iff\phi^{-1}(\mathfrak{q})\not\ni f\iff\mathfrak{q}\not\ni\phi(f)\iff\mathfrak{q}\in Y_{\phi(f)}$.

ii) $\mathfrak{q}\in{\phi^*}^{-1}(V(\mathfrak{a}))\iff\phi^{-1}(\mathfrak{q})\in V(\mathfrak{a})\iff\phi^{-1}(\mathfrak{q})\supseteq\mathfrak{a}\iff\mathfrak{q}\supseteq\phi(\mathfrak{a})\iff\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{a}^e\iff\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{a}^e)$.

iii) まず，一般に任意の $Z\subseteq X$ に対し $\overline{Z}=V(\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p})$ であることを示す．任意に $\mathfrak{p}'\in Z$ をとると $\mathfrak{p}'\supseteq\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p}$ だから $\overline{Z}\subseteq V(\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p})$ である．また，閉集合 $V(E)\supseteq Z$ と $\mathfrak{p}'\in V(\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p})$ を任意にとると $\mathfrak{p}'\supseteq\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p}$ だから命題 1.11-ii) よりある $\mathfrak{p}\in Z$ が存在して $\mathfrak{p}'\supseteq\mathfrak{p}\in Z\subseteq V(E)$ となるから $V(\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p})\subseteq V(E)$ となり，$V(\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p})$ は Z を含む最小の閉集合である．以上から問題 9 より $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))}=V(\bigcap_{\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{b}}\phi^*(\mathfrak{q}))=V(\phi^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{b}}\mathfrak{q}))=V(\phi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}}))=V((\sqrt{\mathfrak{b}})^c)=V(\sqrt{\mathfrak{b}^c})=V(\mathfrak{b}^c)$.

iv) $B\cong A/\operatorname{Ker}(\phi)$ だから命題 1.1 より $\phi^*\colon Y\to V(\operatorname{Ker}(\phi))$ は全単射であり，また i) より連続である．さらに任意の閉集合 $V(E)\subseteq Y$ に対して，ϕ^{-1} は包含関係を保つから $\phi^*(V(E))=V(\phi^{-1}(E))$ となり，したがって ϕ^* は閉写像ゆえ ${\phi^*}^{-1}\colon V(\operatorname{Ker}(\phi))\to Y$ は連続である．特に，ϕ を商写像 $A\twoheadrightarrow A/\mathfrak{N}$ とすれば $V(\operatorname{Ker}(\phi))=V(\mathfrak{N})=\operatorname{Spec}(A)$ だから $\phi^*\colon\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{N})\to\operatorname{Spec}(A)$ は同相写像である．*11

v) まず iii) と同様の議論により $\overline{\phi^*(Y)}=V(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\phi^*(Y)}\mathfrak{p})$ であり，$V(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\phi^*(Y)}\mathfrak{p})=V(\bigcap_{\mathfrak{q}\in Y}\phi^{-1}(\mathfrak{q}))=$

*10 命題 1.1 より $V(\mathfrak{p})\cong\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$ だから問題 19 より既約であると言うこともできる．

*11 邦訳 [1] では「特に，$\operatorname{Spec}(A)$ と $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{N})$ は自然な位相同型写像である」となっているが，「特に，$\operatorname{Spec}(A)$ と $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{N})$ は自然に位相同型である」が正しいと思われる．原著では “In particular, $\operatorname{Spec}(A)$ and $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{N})$ (中略) are naturally homeomorphic.” となっている．

$V(\phi^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{q}\in Y}\mathfrak{q}))=V(\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B))$ である．よって

$$\begin{aligned}
\overline{\phi^*(Y)}=X &\iff V(\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B))=X=V(\mathfrak{N}_A) \qquad \text{(上の議論と iv) より)}\\
&\iff \sqrt{\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)}=\bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)}\mathfrak{p}=\bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{N}_A}\mathfrak{p}=\sqrt{\mathfrak{N}_A} \qquad \text{(問題 9 より)}\\
&\iff \phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)=\mathfrak{N}_A \qquad \text{(一般に } \sqrt{\mathfrak{N}_A}=\mathfrak{N}_A, \sqrt{\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)}=\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B) \text{ だから)}\\
&\iff \sqrt{\mathrm{Ker}(\phi)}=\mathfrak{N}_A \qquad \text{(一般に } \phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)=\sqrt{\mathrm{Ker}(\phi)} \text{ だから)}\\
&\iff \mathrm{Ker}(\phi)\subseteq\mathfrak{N}_A. \qquad \text{(一般に } \sqrt{\mathfrak{N}_A}=\mathfrak{N}_A, \mathfrak{N}_A\subseteq\sqrt{\mathrm{Ker}(\phi)} \text{ だから)}
\end{aligned}$$

vi) 任意の $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(C)$ に対し $(\psi\circ\phi)^{-1}(\mathfrak{p})=\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathfrak{p}))$ であることより明らか．[*12]

vii) 仮定より $\mathrm{Spec}(A)=\{(0),\mathfrak{p}\}$ であり，$\mathfrak{p}$ が極大イデアルであることより B は体の直積なので $\mathrm{Spec}(B)=\{A/\mathfrak{p}\times(0),(0)\times K\}$ である．このとき $\phi^{-1}(A/\mathfrak{p}\times(0))=(0),\phi^{-1}((0)\times K)=\mathfrak{p}$ より ϕ^* は全単射である．ここで問題 19 より $\mathrm{Spec}(A)$ は既約だから特に連結であるが，一方問題 22 より $\mathrm{Spec}(B)$ は連結ではない．したがって $\mathrm{Spec}(A)$ と $\mathrm{Spec}(B)$ は位相同型ではない．[*13]

22. 射影 $\pi_k\colon A\twoheadrightarrow A_k$ により写像 $\pi_k^*\colon\mathrm{Spec}(A_k)\to\mathrm{Spec}(A)$ が誘導され，問題 21-iv) より π_k^* は $\mathrm{Spec}(A_k)$ から $\mathrm{Spec}(A)$ の閉部分集合 $V(\mathrm{Ker}(\pi_k))=V(A_1\times\cdots\times A_{k-1}\times(0)\times A_{k+1}\times\cdots\times A_n)$ への位相同型写像であり，$k\neq l$ ならば $V(\mathrm{Ker}(\pi_k))$ と $V(\mathrm{Ker}(\pi_l))$ は交わりを持たない．ここで A の素イデアルは素イデアル $\mathfrak{p}\subseteq A_k$ について $\pi_k^*(\mathfrak{p})=A_1\times\cdots\times A_{k-1}\times\mathfrak{p}\times A_{k+1}\times\cdots\times A_n$ という形のもので尽くされる．実際，直積因子に A_k 全体でないものが少なくとも 2 つ以上あったら素イデアルではない．したがって集合として全単射 $\coprod_{i=1}^n\pi_k^*\colon\coprod_{i=1}^n\mathrm{Spec}(A_k)\to\mathrm{Spec}(A)$ があるから各 $V(\mathrm{Ker}(\pi_k))$ は $\mathrm{Spec}(A)$ の開かつ閉集合，すなわち連結成分となり，したがって位相空間としても同型である．

ii) $\Longrightarrow$ i)　今示した．

i) $\Longrightarrow$ iii)　X が非連結だから $V(\mathfrak{a}),V(\mathfrak{b})\neq\emptyset$ なるイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subseteq A$ によって $X=V(\mathfrak{a})\sqcup V(\mathfrak{b})$ と書ける．$V(\mathfrak{a}),V(\mathfrak{b})\neq\emptyset$ より $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\neq(1)$ である．$V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a})\cap V(\mathfrak{b})=\emptyset$ より $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$ だからある $f\in\mathfrak{a},g\in\mathfrak{b}$ が存在して $f+g=1$ となる．また $V(\mathfrak{ab})=V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})=X$ より $\mathfrak{ab}\subseteq\mathfrak{N}$ だからある $n>0$ が存在して $(fg)^n=0$ となる．したがって二項展開により $f^n+g^n-(f+g)^n=f^n+g^n-1$ は冪零元だから問題 1 より f^n+g^n は単元であり，よってある $h\in A$ が存在して $h(f^n+g^n)=1$ となる．このとき $hf^n(1-hf^n)=hf^nhg^n=0$ より hf^n は冪等元であり，同様に hg^n も冪等元である．$hf^n\in\mathfrak{a}\neq(1)$ より $hf^n\neq1$，また同様に $hg^n\neq1$ であり，さらに $hf^n+hg^n=1$ より hf^n と hg^n の少なくとも一方は 0 ではない．以上より hf^n と hg^n の少なくとも一方は $0,1$ とは異なる冪等元である．

iii) $\Longrightarrow$ ii)　$x^2=x$ とすると $(1-x)^2=1-2x+x=1-x$ だからイデアル $xA,(1-x)A$ はそれぞれ $x,1-x$ を単位元とする部分環になる．明らかに $A=xA+(1-x)A$ であり，また $x(1-x)=0$ であるから任意の $a\in xA\cap(1-x)A$ に対し $(1-x)a=xa=0$ より $a=0$ となるので $xA\cap(1-x)A=(0)$ であり，よって $A\cong xA\times(1-x)A$.

以上より，特に iii) でないなら i) でないので局所環のスペクトラムは連結である．

23.　i) $f(1-f)=0$ より任意の $\mathfrak{p}\in X$ に対し $f\notin\mathfrak{p}\iff 1-f\in\mathfrak{p}$ となるから $X_f=V(1-f)$.

[*12] i) と vi) より，対応 $A\mapsto\mathrm{Spec}(A),\phi\mapsto\phi^*$ は可換環の圏 **CRing** から位相空間の圏 **Top** への反変関手である．

[*13] 例えば素数 p に対し $A=\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ とおけば問題で与えられた条件を満たす．

ii) $X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n} = X \setminus V((f_1, \ldots, f_n))$ だから問題 11-iii) により存在する $(f_1, \ldots, f_n)$ の生成元 f をとれば $X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n} = X_f$.

iii) ヒントの通り．

iv) 問題 17-v) より X は準コンパクトである．任意に異なる 2 元 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$ をとると問題 11-ii) より極大イデアルだから $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = (1)$ である．よってある $f \in \mathfrak{p}, g \in \mathfrak{q}$ が存在して $f + g = 1$ となる．このとき $g = 1 - f \notin \mathfrak{p}, f = 1 - g \notin \mathfrak{q}$ だから $\mathfrak{p} \in X_g, \mathfrak{q} \in X_f$ であり，問題 17-i) より $X_f \cap X_g = X_{fg} = X_{f(1-f)} = X_0 = \emptyset$ となる．

24. $A(L)$ が $0 \in L$ を零元，$1 \in L$ を単位元とする可換環で，さらに $-a = a$ となることを示す．L において $a'' = a, (a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$ などが成り立つことが容易にわかるので，これを用いる．[*14]

- $(a+b)+c = (((a \wedge b') \vee (a' \wedge b)) \wedge c') \vee (((a' \vee b) \wedge (a \vee b')) \wedge c) = (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (b \wedge a \wedge c)$ で，これは a, b, c に関して対称．
- $a + 0 = (a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0) = (a \wedge 1) \vee 0 = a$.
- $a + a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$.
- $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (b \wedge a') \vee (b' \wedge a) = b + a$.
- $a(b+c) = a \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c)) = (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c) = 0 \vee (a \wedge b \wedge c') \vee 0 \vee (a \wedge b' \wedge c) = (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge a' \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c) = (a \wedge b \wedge (a' \vee c')) \vee ((a' \vee b') \wedge a \wedge c) = ((a \wedge b) \wedge (a \wedge c)') \vee ((a \wedge b)' \wedge (a \wedge c)) = ab + ac$.
- $(ab)c = a(bc), ab = ba, 1a = a$ は明らか．

次に A が Boole 束になることを示す．まず $\leq$ が順序になっていることを示す．

反射律　Boole 環だから $a = a^2$.

反対称律　$a = ab$ かつ $b = ab$ なら $a = ab = b$.

推移律　$a = ab$ かつ $b = bc$ なら $a = ab = a(bc) = (ab)c = ac$.

このように順序を定めると以下が成り立つ．

- $0 = 0a$ より 0 が最小元，$a = 1a$ より 1 が最大元である．
- $a \wedge b = ab$ である．実際，$ab = ab \cdot a = ab \cdot b$ より $ab \leq a, ab \leq b$ であり，任意に $c = ca, c = cb$ なる c をとると $c = cb = (ca)b$ より $c \leq ab$ となる．
- $a \vee b = a + b + ab$ である．実際，$a = a + ab + ab = a(a + b + ab), b = b(a + b + ab)$ より $a, b \leq a + b + ab$ であり，任意に $a = ac, b = bc$ なる c をとると $a + b + ab = (a + b + ab)c$ より $a + b + ab \leq c$ となる．
- a の補元は $1 - a$ によって与えられる．[*15]実際，$a \wedge (1-a) = a(1-a) = 0, a \vee (1-a) = a + 1 - a + a(1-a) = 1$.
- $\wedge, \vee$ は分配的である．実際，$a \wedge (b \vee c) = a(b+c+bc) = ab+ac+abac = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), a \vee (b \wedge c) = a+bc+abc = (a+ab+ab)+(ab+bc+abc)+(ab+abc+abc) = (a+b+ab)(a+c+ac) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

以上より可補分配束，すなわち Boole 束になることがわかる．[*16]

[*14] 集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ を考えて $0, 1, \wedge, \vee, a'$ をそれぞれ $\emptyset, X, \cap, \cup, X \setminus a$ に読み替え，Venn 図を描けばすべての計算は直感的にほとんど明らかである．

[*15] 束における complement は補要素よりはむしろ補元と訳すことの方が多いように思われる．

[*16] 分配束においては $a \vee b = a \vee c, a \wedge b = a \wedge c$ ならば $b = c$ が成り立つことから，補元は存在すれば唯一つであることがわかる．詳しくは束論の教科書を参考のこと．

上で与えた束を $L(A)$ と書くことにして，$A(L(A))$ と A が環として同型であることと，$L(A(L))$ と L が束として (すなわち順序集合として) 同型であることを示す．

- $a+b$ in $A(L(A)) = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$ in $L(A) = a(1-b)+b(1-a)+ab(1-a)(1-b)$ in $A = a+b$ in A.
- ab in $A(L(A)) = a \wedge b$ in $L(A) = ab$ in A.

$L(A(L)) \cong L$ であることは $a \leq b$ in $L(A(L)) \iff a = ab$ in $A(L) \iff a = a \wedge b$ in $L \iff a \leq b$ in L なのでよい．

25. 与えられた Boole 束 L に対し，問題 24 の通りに $A(L)$ を作る．$\mathrm{Spec}(A(L))$ の開かつ閉集合の全体を S とおくと，問題 23-iii) より $S = \{\, X_a : a \in A(L) \,\}$ である．よって写像 $\varphi\colon L \to S; a \mapsto X_a$ は全射で，問題 17-i) より $\varphi(a \wedge b) = X_{ab} = X_a \cap X_b$ であり，また問題 23-i) と同様にして $\varphi(a \vee b) = \varphi((a' \wedge b')') = X_{1-(1-a)(1-b)} = X \setminus (X \setminus X_a \cap X \setminus X_b) = X_a \cup X_b$ となるから φ は束の準同型写像である．最後に φ が単射であることを示す．$X_a = X_b$ とすると，問題 9 から $\sqrt{(a)} = \sqrt{(b)}$ となるが，今 $A(L)$ は Boole 環だから $(a) = (b)$ となる．ここで仮に $a \neq b$ であるとすると，a と b のうち少なくとも一方は ab ではない．$a \neq ab$ として一般性を失わない．さらに $a \in (b)$ であると仮定するとある $u \in A(L)$ が存在して $a = ub$ となるが $a \neq ab = (ub)b = ub$ となり矛盾する．よって $a \notin (b)$ となり $(a) = (b)$ に矛盾する．よって $a = b$.
26. 問題文の最初の方は「A の極大イデアル全体の集合に誘導位相を入れた $\mathrm{Spec}(A)$ の部分空間を A の極大スペクトラムと呼び，$\mathrm{Max}(A)$ で表す．極大スペクトラムは任意の可換環に対しては $\mathrm{Spec}(A)$ のような良い関手的性質を持たない．」などと訳すのが良さそうである．[*17]

   $\mu(U_f) = \tilde{U}_f$ を示す．$\mu(U_f) = \{\, \mathfrak{m}_x : f(x) \neq 0 \,\}$ である．

   ($\subseteq$) 明らか．

   ($\supseteq$) i) と同様にして $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ より元 $x \in V(\mathfrak{m})$ をとると $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ である．$f(x) = 0$ だとすると $f \in \mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}$ となってしまうから $f(x) \neq 0$.

   次に $U_f, \tilde{U}_f$ たちがそれぞれ $X, \tilde{X}$ の開基となることを示す．任意の空でない開集合 $U \subseteq X$ と点 $x \in U$ に対し，Urysohn の補題より $X \setminus U$ 上で 0，x で 1 をとる連続関数 f が存在するから $x \in U_f \subseteq U$ となる．$\tilde{U}_f$ が開基であることは問題 17 と相対位相の定義より明らか．以上より μ, μ^{-1} はともに開写像だから位相同型写像である．
27. μ の全射性を示す．任意に $\mathfrak{m} \in \tilde{X}$ をとると，系 7.10 より $P(X)/\mathfrak{m} \cong k$ である．このとき ξ_i の k における像を x_i とすれば $\mathfrak{m} = (\xi_1 - x_1, \ldots, \xi_n - x_n) = \mathfrak{m}_{(x_1,\ldots,x_n)}$.
28. $P(X) = k[t_1,\ldots,t_n]/I(X), P(Y) = k[s_1,\ldots,s_m]/I(Y)$ とする．X から Y への正則写像全体を $\mathrm{Hom}(X,Y)$ で表し，$P(Y)$ から $P(X)$ への k 代数準同型全体を $\mathrm{Hom}(P(Y),P(X))$ で表す．問題文の対応 $\phi \mapsto (\eta \mapsto \eta \circ \phi)$ を $\alpha\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(P(Y),P(X))$ とする．逆写像 $\beta\colon \mathrm{Hom}(P(Y),P(X)) \to \mathrm{Hom}(X,Y)$ を次のように作る．k 代数準同型 $h\colon P(Y) \to P(X)$ に対し，$h(\overline{s_i}) \in P(X)$ の代表元の 1 つを $\xi_i(t_1,\ldots,t_n) \in k[t_1,\ldots,t_n]$ とおき，$\beta(h) := (\xi_1,\ldots,\xi_m)$ と定める．[*18]

   (α の well-definedness) ϕ の 2 つの代表元 $F = (f_1,\ldots,f_m), F' = (f_1',\ldots,f_m')$ $(f_i, f_i' \in k[t_1,\ldots,t_n])$

[*17] 原著では "The subspace of Spec(A) consisting of the *maximal* ideals of A, with the induced topology, is called the *maximal spectrum of A* and is denoted by Max(A). For arbitrary commutative rings it does not have the nice functorial properties of Spec(A) (see Exercise 21), ..." となっている．

[*18] このあたりの記号は Hartshorne [7, 命題 3.5] を参考にした．

をとると，任意の $x \in X$ に対し $F(x) = F'(x) \in Y$ である．η の 2 つの代表元 $g, g' \in k[s_1, \ldots, s_m]$ をとると，$g - g' \in I(Y)$ すなわち任意の $y \in Y$ に対して $g(y) - g'(y) = 0$ である．このとき，まず任意に $x \in X$ をとると $F(x) \in Y$ だから，$g - g' \in I(Y)$ より $g(F(x)) - g'(F(x)) = 0$ なので $g(F) - g'(F) \in I(X)$ である．また，任意の $x \in X$ に対して $F(x) = F'(x)$ だから $g'(F(x)) - g'(F'(x)) = 0$ ゆえ $g'(F) - g'(F') \in I(X)$ である．以上より $g(F) - g'(F') = (g(F) - g'(F)) + (g'(F) - g'(F')) \in I(X)$. $\alpha(\phi)\colon \eta \mapsto \eta \circ \phi$ が k 代数準同型であることは (代入しているだけなので) 明らか．[*19]

(β の well-definedness)　$h(\overline{s_i})$ の 2 つの代表元 $\xi_i, \xi_i' \in k[t_1, \ldots, t_n]$ をとると $\xi_i - \xi_i' \in I(X)$ だから任意の $x \in X$ に対し $\xi_i(x) - \xi_i'(x) = 0$ である．よって任意の $x \in X$ に対し $(\xi_1(x), \ldots, \xi_m(x)) = (\xi_1'(x), \ldots, \xi_m'(x))$ となり，代表元のとり方によらずに同じ正則写像 $X \to k^m$ が定まる．最後に，この正則写像 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ が $\xi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ となること，すなわち任意の $x \in X$ に対し $\xi(x) \in Y$ となることを示す．[*20]そのために，部分集合 $J \subseteq k[s_1, \ldots, s_m]$ に対し共通零点の集合を $Z(J) := \{\, P \in k^m : \text{任意の } f \in J \text{ に対し } f(P) = 0 \,\}$ とおくと $Z(I(Y)) \subseteq Y$ となることを示す．Y はアフィン多様体だから，ある部分集合 $J \subseteq k[s_1, \ldots, s_m]$ によって $Y = Z(J)$ と書ける．J の任意の元は J の共通零点 $Z(J)$ 上で明らかに 0 となるから $J \subseteq I(Z(J))$ である．このとき両辺に Z を適用すると包含関係が逆転して $Z(J) \supseteq Z(I(Z(J)))$ となり，$Z(I(Y)) \subseteq Y$ を得る．したがって任意の $x \in X$ に対して $\xi(x) \in Z(I(Y))$ を示せばよい．任意の $g(s_1, \ldots, s_m) \in I(Y)$ に対して，h が k 準同型であることより $g(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in g(h(\overline{s_1}), \ldots, h(\overline{s_m})) = h(g(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_m})) = h(\overline{g(s_1, \ldots, s_m)}) = h(\overline{0}) = \overline{0} = I(X)$ となるから任意の $x \in X$ に対し $g(\xi_1(x), \ldots, \xi_m(x)) = 0$ となり，よって $\xi(x) \in Z(I(Y))$.

($\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$)　$\beta \circ \alpha(\phi) = \beta(\eta \mapsto \eta \circ \phi) = (\overline{s_1} \circ \phi, \ldots, \overline{s_m} \circ \phi) = \phi$.

($\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(P(Y),P(X))}$)　$\alpha \circ \beta(h) = \alpha(h(\overline{s_1}), \ldots, h(\overline{s_m})) = \eta \mapsto \eta(h(\overline{s_1}), \ldots, h(\overline{s_m})) = \eta \mapsto h(\eta(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_m})) = \eta \mapsto h(\eta) = h$. (3 つ目の等号は h が k 代数準同型であることから．)

2　加群

1. m と n が互いに素であることから $mx+ny = 1$ なる $x, y \in \mathbb{Z}$ がとれるので $1 \otimes 1 = (mx+ny)(1 \otimes 1) = x(m \otimes 1) + y(1 \otimes n) = 0$ ゆえ $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.
2. 完全列 $\mathfrak{a} \longrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$ に M をテンソルして完全列 $\mathfrak{a} \otimes_A M \xrightarrow{\varphi} M \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} A/\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow 0$ を得，準同型定理より $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\operatorname{Ker}\psi = M/\operatorname{Im}\varphi = M/\mathfrak{a}M$ となる．
3. ($(M \otimes_A N)_k = 0 \Longrightarrow M_k \otimes_k N_k = 0$)　$0 = (M \otimes_A N)_k = k \otimes_A M \otimes_A N$ にさらに k をテンソルして $0 = (k \otimes_A M) \otimes_A (k \otimes_A N) = M_k \otimes_A N_k$ となる．テンソル積の定義により存在する A 双線形写像 $f\colon M_k \times N_k \to M_k \otimes_A N_k$ と k 双線形写像 $g\colon M_k \times N_k \to M_k \otimes_k N_k$ をとる．一般に k 加群 L が与えられたとき，商写像 $\pi\colon A \twoheadrightarrow k$ によって任意の $a \in A, x \in L$ に対し $a \cdot x := \pi(a)x$ と定めることで L を A 加群とみなせる．これにより g は A 線形写像とみなせるから，テンソル積の普遍性より $g = \varphi \circ f$ なる A 線型写像 $\varphi\colon M_k \otimes_A N_k \to M_k \otimes_k N_k$ が存在する．ここで $M_k \otimes_A N_k = 0$

[*19] $\eta \mapsto \eta \circ \phi$ が k 代数準同型なので実際には $g = 0$ に対して示せば十分である．しかし $\mathrm{Hom}(X, Y)$ は環ではないので ϕ についてはそのようなことはできない．(一般に $F - F' \notin \mathrm{Hom}(X, Y)$ である．)

[*20] [2] の全射性の証明はこれが抜けているように思う．

であったから $g=0$ である．よって $M_k\otimes_k N_k$ は $\operatorname{Im} g=0$ で生成されるから $M_k\otimes_k N_k=0$ でなければならない．

($M_k\otimes_k N_k=0\Longrightarrow M_k=0$ または $N_k=0$) 一般に k 上の有限次元ベクトル空間 V,W に対し $\dim(V\otimes_k W)=\dim V\dim W$ となることを示せば十分である．ベクトル空間は次元のみで決まるから $V=k^m, W=k^n$ であるとしてよい．このとき命題 2.14-iii) より $k^{\oplus m}\otimes_k k^{\oplus n}\cong(k\otimes_k k)^{\oplus mn}\cong k^{\oplus mn}$.

4. 命題 2.19 より，単射を保つことを示せばよい．任意の $f\colon N'\to N$ に対して，命題 2.14-iii) と同様にして以下の可換図式を得る．

$$\begin{CD}
N'\otimes_A M @>{f\otimes\mathrm{id}_M}>> N\otimes_A M\\
@V{\cong}VV @VV{\cong}V\\
\bigoplus_{i\in I}(N'\otimes_A M_i) @>{\bigoplus_i(f\otimes\mathrm{id}_{M_i})}>> \bigoplus_{i\in I}(N\otimes_A M_i).
\end{CD}$$

これより，$f\otimes\mathrm{id}_M$ が単射 $\iff\bigoplus_i(f\otimes\mathrm{id}_{M_i})$ が単射 $\iff$ 任意の $i\in I$ に対して $f\otimes\mathrm{id}_{M_i}$ が単射．

5. A 加群としては $A[x]=\bigoplus_{n\geq 0}x^nA\cong\bigoplus_{n\geq 0}A$ であり，命題 2.14-iv) より A は平坦 A 加群だから問題 4 より $A[x]$ は平坦である．
6. 任意の $f=\sum_i a_ix^i\in A[x], g=\sum_j m_jx^j\in M[x]$ に対して，$fg=\sum_k\left(\sum_{i+j=k}a_im_j\right)x^k\in M[x]$ ゆえ $M[x]$ は $A[x]$ 加群である．また，$\varphi\colon M[x]\to A[x]\otimes_A M$ を $\varphi\left(\sum_i m_ix^i\right):=\sum_i(x^i\otimes m_i)$ で，$\psi\colon A[x]\otimes_A M\to M[x]$ を $\psi(f\otimes m):=fm$ で定めると，φ と ψ は互いに逆写像である．
7. $A[x]\twoheadrightarrow(A/\mathfrak{p})[x]$ に準同型定理を用いると $A[x]/\mathfrak{p}[x]\cong(A/\mathfrak{p})[x]$ だから，$A/\mathfrak{p}$ が整域 $\iff A[x]/\mathfrak{p}[x]$ が整域．また $(0)\subseteq\mathbb{Q}$ は極大イデアルだが $(0)[x]\subseteq\mathbb{Q}[x]$ は極大イデアルではない．
8. i) 任意の単射 $L'\to L$ に対して，M が平坦であることより $L'\otimes_A M\to L\otimes_A M$ は単射であり，さらに N が平坦であることより $(L'\otimes_A M)\otimes_A N\to(L\otimes_A M)\otimes_A N$ は単射である．よって命題 2.14-ii) より $L'\otimes_A(M\otimes_A N)\to L\otimes_A(M\otimes_A N)$ は単射である．

   ii) A 加群の任意の単射 $M'\to M$ をとる．このとき命題 2.14-iii) と演習問題 2.15 より次の可換図式を得る．

$$\begin{CD}
M'\otimes_A N @>>> M\otimes_A N\\
@V{\cong}VV @VV{\cong}V\\
M'\otimes_A(B\otimes_B N) @>>> M\otimes_A(B\otimes_B N)\\
@V{\cong}VV @VV{\cong}V\\
(M'\otimes_A B)\otimes_B N @>>> (M\otimes_A B)\otimes_B N.
\end{CD}$$

   仮定より B が平坦 A 代数で N が平坦 B 加群だから下段は単射であり，したがって上段も単射である．

9. 完全列を $0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\longrightarrow 0$ とおく．M',M'' の生成元をそれぞれ $x'_1,\dots,x'_m\in M', x''_1,\dots,x''_n\in M''$ とし，$y'_i:=f(x'_i)\,(i=1,\dots,m)$ とおく．また，g の全射性から $g(y''_j)=x''_j$ なる $y''_j\,(j=1,\dots,n)$ がとれる．このとき $\varphi'\colon A^m\to M', \varphi\colon A^{m+n}\to M, \varphi''\colon A^n\to M''$ を

$$\begin{aligned}
\varphi'(a'_1,\dots,a'_m)&:=a'_1x'_1+\cdots+a'_mx'_m,\\
\varphi(a'_1,\dots,a'_m,a''_1,\dots,a''_n)&:=a'_1y'_1+\cdots+a'_my'_m+a''_1y''_1+\cdots+a''_ny''_n,\\
\varphi''(a''_1,\dots,a''_n)&:=a''_1x''_1+\cdots+a''_nx''_n
\end{aligned}$$

と定めると以下の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^m \arrow[r, "i"] \arrow[d, two heads, "\varphi'"] & A^{m+n} \arrow[r, two heads, "j"] \arrow[d, "\varphi"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

φ の全射性を示せば証明が終わる．任意に $m \in M$ をとると，φ'' の全射性から $\varphi''(a'') = g(m)$ となる $a'' \in A^n$ がとれ，j の全射性から $j(a) = a''$ となる $a \in A^{m+n}$ がとれる．右の四角形の可換性から $g(m - \varphi(a)) = g(m) - g(\varphi(a)) = g(m) - \varphi''(j(a)) = g(m) - g(m) = 0$ となるので $m - \varphi(a) \in \operatorname{Ker} g$ である．よって下段の完全性から $f(m') = m - \varphi(a)$ となる $m' \in M$ がとれ，φ' の全射性から $\varphi'(a') = m'$ となる $a' \in A^m$ がとれる．このとき左の四角形の可換性から $\varphi(i(a') + a) = \varphi(i(a')) + \varphi(a) = f(\varphi'(a')) + \varphi(a) = (m - \varphi(a)) + \varphi(a) = m.$

10. 次の可換図式の通りに写像に名前を付ける．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, two heads, "\pi_1"] & N \arrow[d, "\pi_2"] \\
M/\mathfrak{a}M \arrow[r, two heads, "\tilde{u}"] & N/\mathfrak{a}N.
\end{tikzcd}$$

任意に $n \in N$ をとると，$\tilde{u} \circ \pi_1$ の全射性から $\tilde{u}(\pi_1(m)) = \pi_2(n)$ なる $m \in M$ がとれる．よって図式の可換性から $\pi_2(n - u(m)) = \pi_2(n) - \tilde{u}(\pi_1(m)) = 0$ となるので $n - u(m) \in \mathfrak{a}N$ である．したがって $n \in \mathfrak{a}N + \operatorname{Im} u$ ゆえ $N = \mathfrak{a}N + \operatorname{Im} u$ であり，仮定から $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}$ で N は有限生成なので系 2.7 より $N = \operatorname{Im} u$. [*21]

11. [*22]$\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルのひとつとし，$\phi\colon A^m \to A^n$ を (A 加群の間の) 同型写像とする．$k := A/\mathfrak{m}$ とおくと，命題 2.14-iii) より A 加群としての同型 $k \otimes_A A^n \cong (k \otimes_A A)^n \cong k^n$ がある．この同型写像は k 線形でもあるから，k 加群，すなわち k ベクトル空間としての同型を与えるのでその次元は等しくなければならない．

次に，$\phi\colon A^m \to A^n$ が全射ならば，テンソル積の右完全性より $1 \otimes \phi\colon k \otimes_A A^m \to k \otimes_A A^n$ は k ベクトル空間の間の全射となる．したがって $m \geq n$.

最後に，$m > n$ であると仮定して ϕ が単射ではないことを示す．A^n の第 i 射影を $\pi_i\colon A^n \to A$ とし，$\phi_i := \pi_i \circ \phi \, (1 \leq i \leq n)$ とおく．A^m, A^n の標準的な基底を $(e_i)_{1 \leq i \leq m}, (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ とし，$a_{ij} := \phi_i(e_j)$ とおくと A 線形写像 ϕ のこの基底に関する表現行列は $n \times m$ 行列 $M := (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ である．$M = 0$ のときは明らかに単射でないので $M \neq 0$ としてよい．A^m の成分を並べ替える同型写像を ϕ と合成することで M の左端の n 次の部分正方行列 $D := (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \neq 0$ であるとしてよい．

($\det D \neq 0$ のとき)　D の余因子行列を D^* とおくと $DD^* = (\det D) I_n$ である (ここで I_n は n 次の単

[*21] この問題において，N が有限生成であることは本質的である．例えば $A := \mathbb{Z}_{(2)} = \{\, n/m \in \mathbb{Q} \mid 2 \nmid m \,\}$ とおくと A は局所環であり，$\mathfrak{a} := 2\mathbb{Z}_{(2)}, M := \mathbb{Q}, N := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, u\colon M \hookrightarrow N$ とおくと u は明らかに全射ではないが，$\mathfrak{a}M = M, \mathfrak{a}N = N$ より $M/\mathfrak{a}M = N/\mathfrak{a}N = 0$ だから $\tilde{u}$ は全射となる．

[*22] 問題には特に明記されていないが，ϕ が加群ではなく環の準同型の場合には問題の主張は (3 つとも) 成立しない．実際，A を $\mathbb{Z}$ の可算直積 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ とし，$f\colon A^2 \to A$ を $f((a_n), (b_n)) := (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ と定めると f は全単射な環準同型であるので，f と f^{-1} を考えればよい．

位行列）．よって ${}^t(x_1,\dots,x_n) := D^* \cdot {}^t(a_{1,n+1},\dots,a_{n,n+1})$ とおけば

$$\phi(x_1,\dots,x_n,-\det D,0,\dots,0) = \left(\begin{array}{c|cccc} & a_{1,n+1} & * & \cdots & * \\ D & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n,n+1} & * & \cdots & * \end{array}\right) \begin{pmatrix} D^* \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} \\ -\det D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= DD^* \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} - \det D \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} = 0$$

となり，$\det D \neq 0$ より $(x_1,\dots,x_n,-\det D,0,\dots,0) \neq 0$ だから $\mathrm{Ker}(\phi) \neq 0$.

($\det D = 0$ のとき) $r := \max\{\, k \mid D$ の k 次の部分正方行列で行列式が 0 でないものが存在する $\}$ とおく．$D \neq 0, \det D = 0$ より $1 \leq r < n$ である．A^m, A^n の成分を入れ替える同型写像を ϕ の前後に合成することにより，D の左上の r 次の部分正方行列 $R := (a_{ij})_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq r}$ について $\det R \neq 0$ であるとしてよい．このとき D の左上の $(r+1)$ 次の部分正方行列 $R' := (a_{ij})_{1\leq i\leq r+1, 1\leq j\leq r+1}$ を考えると r の定義から $\det R' = 0$ でなければならない．R' の第 $(r+1)$ 行に関する余因子展開 (Laplace 展開) を $\det R' = a_{r+1,1}C_{r+1,1} + \cdots + a_{r+1,r+1}C_{r+1,r+1}$（ここで C_{ij} は R' から i 行目と j 行目を取り除いた r 次正方行列の行列式の $(-1)^{i+j}$ 倍）とすると，$C_{r+1,r+1} = \det R \neq 0$ である．よって $x := (C_{r+1,1},\dots,C_{r+1,r+1},0,\dots,0) \in A^m$ とおくと $x \neq 0$ かつ $\phi(x) = (\sum_{j=1}^{r+1} a_{1j}C_{r+1,j},\dots,\sum_{j=1}^{r+1} a_{n,j}C_{r+1,j})$ である．ここで

$$\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}C_{r+1,j} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r+1} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,r+1} \end{pmatrix}$$

は $1 \leq i \leq r$ のときは同じ行が現れることから 0 であり，$r < i \leq n$ のときは r の定義から 0 である．よって $\phi(x) = 0$ だから $\mathrm{Ker}(\phi) \neq 0$. *23

12. A^n の標準的な基底 $e_1,\dots,e_n$ をとると，ϕ の全射性から $\phi(u_i) = e_i$ となる $u_i \in M\ (1 \leq i \leq n)$ がとれる．$\psi\colon A^n \to M$ を $\psi(a_1,\dots,a_n) := a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ と定めると明らかに $\phi\circ\psi = \mathrm{id}_{A^n}$ である．今，系列 $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\phi) \overset{i}{\hookrightarrow} M \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} A^n \longrightarrow 0$ は完全である．$M = \mathrm{Im}(i) \oplus \mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Ker}(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\psi)$ となることを示す．任意の $m \in M$ に対して，$m - \psi(\phi(m)) \in \mathrm{Ker}(\phi)$ かつ $\psi(\phi(m)) \in \mathrm{Im}(\psi)$ だから $m = (m - \psi(\phi(m))) + \psi(\phi(m)) \in \mathrm{Ker}(\phi) + \mathrm{Im}(\psi)$ である．また任意に $x \in \mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Im}(\psi)$ をとると $x = \psi(\phi(x)) = \psi(0) = 0$ である．よって全射 $M \twoheadrightarrow M/\mathrm{Im}(\psi) \cong \mathrm{Ker}(\phi)$ がある．仮定より M は有限生成だから $\mathrm{Ker}(\phi)$ も有限生成である．*24*25

*23 ちなみに Papaioannou [3] によれば最後の非単射性は “it’s probably one of the most difficult problems in the book!” だそうである．

*24 有限生成加群の部分加群は一般には有限生成加群とは限らない．実際，無限変数多項式環 $A := \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ は (1 を生成元とする) 有限生成 A 加群だが，定数項が 0 であるような多項式のなす部分加群 $\{\, f \in A \mid f(0,0,\dots) = 0 \,\}$ を考えると，1 次の単項式 $x_1, x_2, \dots$ の全体を有限個の生成元で作ることはできないので有限生成ではない．任意の部分加群が有限生成であるような加群を Noether 加群と言う (第 6 章)．

*25 この問題 12 と次の問題 13 はホモロジー代数学において**分裂補題** (splitting lemma) と呼ばれるものである．

13. $p\colon N_B \to N$ を $p(b\otimes y) := by$ と定義すると明らかに $p\circ g = \mathrm{id}_N$ だから g は単射である．今，系列 $0 \longrightarrow N \underset{p}{\overset{g}{\rightleftarrows}} N_B \overset{j}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Coker}(g) \longrightarrow 0$ は完全である．$N_B = \mathrm{Ker}(p)\oplus \mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Ker}(p)\oplus \mathrm{Im}(g)$ となることを示す．任意の $x\in N_B$ に対して，$x-g(p(x))\in \mathrm{Ker}(p)$ かつ $g(p(x))\in \mathrm{Im}(g)$ だから $x=(x-g(p(x)))+g(p(x))\in \mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Im}(g)$ である．また任意に $x\in \mathrm{Ker}(p)\cap \mathrm{Im}(g)$ をとると $x=g(p(x))=g(0)=0$ である．よって $g(N)=\mathrm{Im}(g)$ は N_B の直和因子である．
14. $i\le j$ のとき，任意の $x_i\in M_i$ に対し $\mu_i(x_i)-\mu_j(\mu_{ij}(x_i))=\mu(x_i)-\mu(\mu_{ij}(x_i))=\mu(x_i-\mu_{ij}(x_i))=0$ だから $\mu_i=\mu_j\circ\mu_{ij}$.
15. 任意に $x\in M$ をとると，μ の全射性からある有限和 $\sum_{i\in I_0} x_i\in C$ ($I_0\subseteq I$ は有限集合, $x_i\in M_i$) が存在して $\mu(\sum_{i\in I_0} x_i)=x$ となる．I が有向集合であることより全ての $i\in I_0$ に対し $i\le j$ となる j がとれるので問題 14 より $x=\mu(\sum_{i\in I_0}x_i)=\sum_{i\in I_0}\mu(x_i)=\sum_{i\in I_0}\mu_i(x_i)=\sum_{i\in I_0}\mu_j(\mu_{ij}(x_i))=\mu_j(\sum_{i\in I_0}\mu_{ij}(x_i))$.
後半を示すために，順極限をもうひとつの方法で定義する．集合としての直和 $\coprod_{i\in I} M_i$ に二項関係 $\sim$ を，$x_i\in M_i, x_j\in M_j$ に対し

$$x_i\sim x_j \iff \text{ある } k\in I \text{ が存在して } i,j\le k \text{ かつ } \mu_{ik}(x_i)=\mu_{jk}(x_j)$$

で定める．これが同値関係であることは容易に確かめられる．$x_i\in M_i$ の $\sim$ による同値類を $[x_i]$ と表し，商集合 $M' := (\coprod_{i\in I} M_i)/\!\sim$ に演算を

$$\begin{aligned}[x_i]+[x_j] &:= [\mu_{ik}(x_i)+\mu_{jk}(x_j)] \quad (k\ge i,j),\\ a[x_i] &:= [ax_i]\end{aligned}$$

と定めると well-defined であり，この演算により M' は A 加群になる．写像 $\alpha\colon C\to M'$ を $\alpha(\sum_{i\in I_0}x_i) := \sum_{i\in I_0}[x_i]$ と定めると α は全射準同型である．このとき，D の各生成元 $x_i-\mu_{ij}(x_i)$ ($i\le j, x_i\in M_i$) について $\mu_{ij}(x_i)=\mu_{jj}(\mu_{ij}(x_i))$ より $x_i\sim\mu_{ij}(x_i)$ だから $\alpha(x_i-\mu_{ij}(x_i))=[x_i]-[\mu_{ij}(x_i)]=0$ となるので，α から誘導される写像 $\bar\alpha\colon M\to M', \bar\alpha(\mu(\sum_{i\in I_0}x_i))=\sum_{i\in I_0}[x_i]$ は well-defined である．[*26] よって $\mu_i(x_i)=0$ のとき $[x_i]=\bar\alpha(\mu_i(x_i))=0=[0_i]$ (ここで 0_i は M_i の零元を表す) だから $\sim$ の定義よりある $j\ge i$ が存在して $\mu_j(x_i)=\mu_j(0_i)=0_j$. [*27]
16. 任意に $x\in M$ をとると，問題 15 よりある $i\in I, x_i\in M_i$ が存在して $x=\mu_i(x_i)$ と書ける．このとき仮定 $\alpha_i=\alpha\circ\mu_i$ より $\alpha(x)=\alpha(\mu_i(x_i))=\alpha_i(x_i)$ でなければならないからこのような α は存在すれば唯一つである．準同型写像 $\alpha'\colon C\to N$ を $\alpha'(\sum_{i\in I_0}x_i):=\sum_{i\in I_0}\alpha_i(x_i)$ と定めると，D の各生成元 $x_i-\mu_{ij}(x_i)$ について $\alpha'(x_i-\mu_{ij}(x_i))=\alpha_i(x_i)-\alpha_j(\mu_{ij}(x_i))=\alpha_j(\mu_{ij}(x_i))-\alpha_j(\mu_{ij}(x_i))=0$ となる．よって α' から誘導される写像 $\alpha\colon M\to N, \alpha(\mu(\sum_{i\in I_0}x_i))=\sum_{i\in I_0}\alpha_i(x_i)$ は well-defined である．
最後に，$(M,\mu_i),(M',\mu_i')$ が問題文の性質を満たすとする．M が性質を満たすことより準同型 $\alpha\colon M\to M'$ が存在して全ての $i\in I$ に対し $\mu_i'=\alpha\circ\mu_i$ が成り立ち，M' が性質を満たすことより準同型 $\beta\colon M'\to M$ が存在して全ての $i\in I$ に対し $\mu_i=\beta\circ\mu_i'$ が成り立つ．このとき任意の $i\in I$ に対して $\mu_i=\beta\circ\mu_i'=\beta\circ(\alpha\circ\mu_i)=(\beta\circ\alpha)\circ\mu_i$ が成り立ち，id_M も明かに同じ性質を満たすので一意性から $\beta\circ\alpha=\mathrm{id}_M$ となる．同様にして $\alpha\circ\beta=\mathrm{id}_{M'}$ が言えるので α と β は互いに逆写像となり，M と M' は同型である．

---

*26 ここで $\bar\alpha$ の逆写像 $\beta\colon M'\to M, \beta([x_i]):=\mu_i(x_i)$ が well-defined であることも容易に示せるので，M と M' は同型である．
*27 [2] の「$x\in M_k\cap D$ ならばある $x_k\in M_k$ が存在して $x=x_k-\mu_{kk}(x_k)$ と書ける」という主張は一般には成り立たない．

17. まず $\sum M_i = \bigcup M_i$ を示す．$\bigcup M_i \subseteq \sum M_i$ は明らか．任意に $\sum_{i\in I_0} x_i \in \sum M_i$ ($I_0 \subseteq I$ は有限集合で $x_i \in M_i$) をとると，仮定よりある $j \in I$ が存在して $\sum_{i\in I_0} M_i \subseteq M_j$ となるから $\sum_{i\in I_0} x_i \in M_j \subseteq \bigcup M_i$.
I は明らかに有向集合だから順極限 $\varinjlim M_i$ が存在する．各 $i \in I$ について包含写像を $\iota_i\colon M_i \hookrightarrow \bigcup M_i$ とし，問題 16 の普遍性より存在する準同型写像 $\alpha\colon \varinjlim M_i \to \bigcup M_i$ をとる．任意に $x \in \bigcup M_i$ をとるとある $i \in I$ が存在して $x \in M_i$ となるから $\alpha(\mu_i(x)) = \iota_i(x) = x \in \bigcup M_i$ となり α は全射である．また $x \in \varinjlim M_i$ について $\alpha(x) = 0$ であったとすると，問題 15 よりある $i \in I$ と $x_i \in M_i$ によって $x = \mu_i(x_i)$ と書けるので $\iota_i(x_i) = \alpha(\mu_i(x_i)) = \alpha(x) = 0 = \iota_i(0)$ となり，ι_i の単射性から $x_i = 0$ ゆえ $x = 0$ となるから $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$ となって α は単射である．
最後に，任意の A 加群 M をとり，M の各有限部分集合 $S \subseteq M$ に対し部分加群 M_S を S で生成される部分加群 $\langle S\rangle$ とする．M の有限部分集合の全体 $\Lambda := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(M)$ に包含関係で順序を入れると有向集合となるから，$S \subseteq T$ なる各 $S, T \in \Lambda$ に対し $\iota_{ST}\colon M_S \hookrightarrow M_T$ を包含写像とすれば (M_S, ι_{ST}) は順系であり，したがって前半より $M = \bigcup_{S\in\Lambda} M_S = \varinjlim_{S\in\Lambda} M_S$.[*28]
18. 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mu_{ij}"'] \arrow[d, "\phi_i"] \arrow[rr, bend left, "\mu_i"] & M_j \arrow[r, "\mu_j"'] \arrow[d, "\phi_j"] & M \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ N_i \arrow[r, "\nu_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\nu_i"'] & N_j \arrow[r, "\nu_j"] & N. \end{tikzcd}$$

$(N, \nu_i \circ \phi_i)$ が順系 $\mathbf{M}$ 上の**余錐** (cocone) であること (すなわち，問題 16 における (N, α_i) と同じ条件を満たすこと) を示す．実際，$i \le j$ なる任意の $i, j \in I$ に対し $\nu_i \circ \phi_i = \nu_j \circ \nu_{ij} \circ \phi_i = \nu_j \circ \phi_j \circ \mu_{ij}$ となるから $(N, \nu_i \circ \phi_i)$ は余錐である．よって問題 16 の普遍性より唯一の準同型写像 $\phi = \varinjlim \phi_i\colon M \to N$ が存在して任意の $i \in I$ に対し $\phi \circ \mu_i = \nu_i \circ \phi_i$.
19. $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij}), \mathbf{N} = (N_i, \nu_{ij}), \mathbf{P} = (P_i, \pi_{ij})$ とし，与えられた準同型写像をそれぞれ $\mathbf{\Phi}\colon \mathbf{M} \to \mathbf{N}\,(\phi_i\colon M_i \to N_i), \mathbf{\Psi}\colon \mathbf{N} \to \mathbf{P}\,(\psi_i\colon N_i \to P_i)$ とする．問題 18 より準同型写像 $\phi\colon M \to N, \psi\colon N \to P$ が存在して各 $i \in I$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\mu_i"] & N_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\nu_i"] & P_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ M \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[r, "\psi"] & P \end{tikzcd}$$

は可換となる．このとき任意に $x \in M$ をとると，問題 15 よりある $i \in I, x_i \in M_i$ が存在して $x = \mu_i(x_i)$ となるので完全性から $\psi(\phi(x)) = \psi(\phi(\mu_i(x_i))) = \pi_i(\psi_i(\phi_i(x_i))) = \pi_i(0) = 0$ となって

[*28] M を整列する必要はない (したがって選択公理は不要である) ことに注意する．

$\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. 次に，以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & & N_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dd, "\nu_i"'] \arrow[dr, "\nu_{ij}"] & & P_i \arrow[dd, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_{ij}"] & \\
 & M_j \arrow[rr, "\phi_j"'] \arrow[dl, "\mu_j"'] & & N_j \arrow[rr, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\nu_j"] & & P_j \arrow[dl, "\pi_j"] \\
M \arrow[rr, "\phi"'] & & N \arrow[rr, "\psi"'] & & P. &
\end{tikzcd}$$

任意に $y \in \mathrm{Ker}(\psi)$ をとると，問題 15 よりある $i \in I, y_i \in N_i$ が存在して $y = \nu_i(y_i)$ となるから可換性より $\pi_i(\psi_i(y_i)) = \psi(\nu_i(y_i)) = \psi(y) = 0$. よって問題 15 よりある $j \geq i$ が存在して $\pi_{ij}(\psi_i(y_i)) = 0 \in P_j$ となるから可換性より $\psi_j(\nu_{ij}(y_i)) = \pi_{ij}(\psi_i(y_i)) = 0$ だから $\nu_{ij}(y_i) \in \mathrm{Ker}(\psi_j)$. よって完全性よりある $x_j \in M_j$ が存在して $\phi_j(x_j) = \nu_{ij}(y_i)$ となるから可換性より $\phi(\mu_j(x_j)) = \nu_j(\phi_j(x_j)) = \nu_j(\nu_{ij}(y_i)) = \nu_i(y_i) = y$.

20. $(M_i \otimes N, \mu_{ij} \otimes 1)$ が順系であることは明らか．順極限の定義から定まる写像を $\nu_i \colon M_i \otimes N \to P$ とおく．任意の $(x, n) \in M \times N$ に対し，$g(x, n) \in P$ を次のように定義する: 問題 15 よりある $i \in I$ が存在して $x = \mu_i(x_i)$ と書けるので，$g(x) := \nu_i(g_i(x_i, n)) = \nu_i(x_i \otimes n)$ とおく．このとき写像 $g \colon M \times N \to P$ が well-defined に定まることを示す．ある $j \in I$ と $x_j \in M_j$ に対し $\mu_i(x_i) = \mu_j(x_j)$ だったとする．問題 15 の解答での順極限の構成よりある $k \in I$ が存在して $\mu_{ik}(x_i) = \mu_{jk}(x_j)$ となる．よって図式

$$\begin{tikzcd}
 & M_j \times N \arrow[rr, "g_j"] \arrow[dd, "\mu_{jk}\times 1"'] \arrow[ddd, bend left, "\mu_j\times 1"] & & M_j \otimes N \arrow[dd, "\mu_{jk}\otimes 1"'] \arrow[ddd, bend left, "\nu_j"] \\
M_i \times N \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "\mu_{ik}\times 1"] \arrow[ddr, bend right, "\mu_i\times 1"'] & & M_i \otimes N \arrow[dr, "\mu_{ik}\otimes 1"] \arrow[ddr, bend right, "\nu_i"'] & \\
 & M_k \times N \arrow[rr, "g_k"] \arrow[d, "\mu_k\times 1"'] & & M_k \otimes N \arrow[d, "\nu_k"] \\
 & M \times N \arrow[rr, dashed, "g"] & & P
\end{tikzcd}$$

の可換性から

$$\begin{array}{ccccccc}
\nu_i(g_i(x_i, n)) & = & \nu_k((\mu_{ik} \otimes 1)(g_i(x_i, n))) & = & \nu_k(g_k((\mu_{ik} \times 1)(x_i, n))) & = & \nu_k(g_k(\mu_{ik}(x_i), n)) \\
 & & & & & & \| \\
\nu_j(g_j(x_j, n)) & = & \nu_k((\mu_{jk} \otimes 1)(g_j(x_j, n))) & = & \nu_k(g_k((\mu_{jk} \times 1)(x_j, n))) & = & \nu_k(g_k(\mu_{jk}(x_j), n))
\end{array}$$

を得る．各 g_i が A 双線形なので g も A 双線形である．よってテンソル積の普遍性から準同型 $\phi \colon M \otimes N \to P$ が定まる．標準的な写像に $f \colon M \times N \to M \otimes N$ と名前を付ける．ϕ が ψ の逆写像であることを示す．

($\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{M\otimes N}$)　以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & & M\otimes N \arrow[d, "\phi"] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{id}"] \\
 & M\times N \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[d, "\psi"] \\
M_i\times N \arrow[ur, "\mu_i\times 1"] \arrow[r, "g_i"] & M_i\otimes N \arrow[ur, "\nu_i"'] \arrow[r, "\mu_i\otimes 1"'] & M\otimes N.
\end{tikzcd}$$

まず，ϕ の定義より上段の三角形は可換である ($\phi \circ f = g$)．任意に $(x,n) \in M\times N$ をとると，問題 15 よりある $i \in I$ と $x_i \in M_i$ が存在して $x = \mu_i(x_i)$ が成り立つ．このとき $\psi(g(x,n)) = \psi(g(\mu_i(x_i),n)) = \psi(g((\mu_i\times 1)(x,n))) = \psi(\nu_i(g_i(x_i,n))) = (\mu_i\otimes 1)(g_i(x_i,n)) = f((\mu_i\times 1)(x_i,n)) = f(\mu(x_i),n) = f(x,n)$ であり，x の任意性から $\psi\circ g = f$ を得る．よって $\psi\circ\phi\circ f = f = \mathrm{id}_{M\otimes N}\circ f$ だからテンソル積の普遍性より $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_{M\otimes N}$ でなければならない．

($\phi\circ\psi = \mathrm{id}_P$)　任意に $i\in I$ をとる．以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "\psi"] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{id}"] \\
 & M_i\otimes N \arrow[ur, "\nu_i"] \arrow[r, "\mu_i\otimes 1"] \arrow[dr, "\nu_i"'] & M\otimes N \arrow[d, "\phi"] \\
M_i\times N \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "\mu_i\times 1"] & M\times N \arrow[ur, "f"'] \arrow[r, "g"'] & P.
\end{tikzcd}$$

まず，ψ の定義より上段の三角形は可換である ($\psi\circ\nu_i = \mu_i\otimes 1$)．任意に $(x_i,n)\in M_i\times N$ をとると，$\phi((\mu_i\otimes 1)(g_i(x_i,n))) = \phi(f((\mu_i\times 1)(x_i,n))) = g((\mu_i\times 1)(x_i,n)) = \nu_i(g_i(x_i,n))$ となるから $\phi\circ(\mu_i\otimes 1)\circ g_i = \nu_i\circ g_i$ である．よってテンソル積の普遍性から $\phi\circ(\mu_i\otimes 1) = \nu_i$ を得る．以上より任意の $i\in I$ に対し $\phi\circ\psi\circ\nu_i = \phi\circ(\mu_i\otimes 1) = \nu_i = \mathrm{id}_P\circ\nu_i$ となるから順極限の普遍性 (問題 16) より $\phi\circ\psi = \mathrm{id}_P$ でなければならない．

21. 順極限の定義から定まる写像を $\alpha_i\colon A_i\to A$ とおく．任意の $x,y\in A$ に対し，それらの積 $x\cdot y\in A$ を次のように定義する: 問題 15 より，ある $i,j\in I$ と $x_i\in M_i, y_j\in M_j$ が存在して $x=\alpha_i(x_i), y=\alpha_j(x_j)$ となる．I が有向集合であることよりある $k\in I$ が存在して $k\geq i, k\geq j$ が成り立つ．$x_k := \alpha_{ik}(x_i), y_k := \alpha_{jk}(y_j)$ とおき，$x\cdot y := \alpha_k(x_k y_k)$ と定める．[*29]この積が well-defined であることを示す．ある $l\in I$ と $x_l, y_l\in M_l$ に対し $\alpha_l(x_l)=x, \alpha_l(y_l)=y$ だったとする．このとき問題 15 の解答の構成よりある $\lambda\in I$ が存在して $\alpha_{k\lambda}(x_k)=\alpha_{l\lambda}(x_l), \alpha_{k\lambda}(y_k)=\alpha_{l\lambda}(y_l)$ となる．よって

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_l(x_l y_l) & = & \alpha_\lambda(\alpha_{l\lambda}(x_l y_l)) & = & \alpha_\lambda(\alpha_{l\lambda}(x_l)\alpha_{l\lambda}(y_l)) \\
 & & & & \| \\
\alpha_l(x_k y_k) & = & \alpha_\lambda(\alpha_{k\lambda}(x_k y_k)) & = & \alpha_\lambda(\alpha_{k\lambda}(x_k)\alpha_{k\lambda}(y_k))
\end{array}$$

を得る．この積のもとで α_i が環準同型になることは明らか．

$A=0$ と仮定し，$i\in I$ を固定する．このとき $\alpha_i(1_{A_i}) = 0_A$ だから，問題 15 よりある $j\geq i$ が存在して $\alpha_{ij}(1_{A_i}) = 0_{A_j}$ となる．一方，環準同型の定義より $\alpha_{ij}(1_{A_i}) = 1_{A_j}$ だから $A_j = 0$.

[*29] 邦訳 [1] では「A は A_i から環の構造を受け継ぎ，したがって写像 $A_i\to A$ は環準同型写像となることを示せ」となっているが，「A は写像 $A_i\to A$ が環準同型写像となるような環構造を受け継ぐことを示せ」が正しいと思われる．原著では “Show that A inherits a ring structure so that the mappings $A_i\to A$ are ring homomorhpism” となっている．

22. $A := \varinjlim A_i$ とおき，順極限の定義から定まる写像をそれぞれ $\alpha_{ij}\colon A_i \to A_j, \alpha_i\colon A_i \to A, \beta_{ij}\colon \mathfrak{N}_i \to \mathfrak{N}_j, \beta_i\colon \mathfrak{N}_i \to \varinjlim \mathfrak{N}_i$ とおく (環準同型は冪零元を冪零元に写すので $\beta_{ij} = \alpha_{ij}|_{\mathfrak{N}_i}$ は well-defined である)．各 $i \in I$ に対し包含写像を $\iota_i\colon \mathfrak{N}_i \hookrightarrow A_i$ とおくと，問題 18 から準同型 $\iota\colon \varinjlim \mathfrak{N}_i \to A$ が定まる．任意の $i \in I$ に対し $0 \to \mathfrak{N}_i \xrightarrow{\iota_i} A_i$ は完全だから，問題 19 より $0 \to \varinjlim \mathfrak{N}_i \xrightarrow{\iota} A$ も完全なので ι は単射，すなわち $\varinjlim \mathfrak{N}_i$ は A の部分加群とみなせる．$\iota(\varinjlim \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{N}_A$ を示す．

($\subseteq$) 任意に $x \in \varinjlim \mathfrak{N}_i$ をとると，問題 15 よりある $i \in I$ と $x_i \in \mathfrak{N}_i$ が存在して $x = \beta_i(x_i)$ となる．このときある $n > 0$ に対し $\iota_i(x_i)^n = 0$ となるから $\iota(x)^n = \iota(\beta_i(x_i))^n = \alpha_i(\iota_i(x_i))^n = \alpha_i(\iota_i(x_i)^n) = \alpha_i(0) = 0.$[*30]

($\supseteq$) 任意に $a \in \mathfrak{N}_A$ をとると，ある $n > 0$ に対し $a^n = 0$ となる．問題 15 よりある $i \in I$ と $a_i \in A_i$ が存在して $a = \alpha_i(a_i)$ となるので $\alpha_i(a_i^n) = \alpha_i(a_i)^n = a^n = 0$ となる．よって再び問題 15 よりある $j \geq i$ が存在して $0 = \alpha_{ij}(a_i^n) = \alpha_{ij}(a_i)^n$ となるので，$a_j := \alpha_{ij}(a_i)$ とおけば $a_j \in \iota_j(\mathfrak{N}_j)$ を得る．よって $a_j = \iota_j(x_j)$ なる $x_j \in \mathfrak{N}_j$ をとると $a = \alpha_i(a_i) = \alpha_j(\alpha_{ij}(a_i)) = \alpha_j(a_j) = \alpha_j(\iota_j(x_j)) = \iota(\beta_j(x_j)) \in \iota(\varinjlim \mathfrak{N}_i)$.

$x, y \in A$ について $xy = 0$ だったとする．問題 15 よりある $i \in I$ と $x_i, y_i \in A_i$ が存在して $x = \alpha_i(x_i), y = \alpha_i(y_i)$ となる．このとき $0 = xy = \alpha_i(x_i)\alpha_i(y_i) = \alpha_i(x_i y_i)$ だから，再び問題 15 よりある $j \geq i$ が存在して $0 = \alpha_{ij}(x_i y_i) = \alpha_{ij}(x_i)\alpha_{ij}(y_i)$ となる．A_j が整域であることより $\alpha_{ij}(x_i) = 0$ または $\alpha_{ij}(y_i) = 0$ である．よって $x = \alpha_i(x_i) = \alpha_j(\alpha_{ij}(x_i)) = \alpha_j(0) = 0$ または $y = \alpha_i(y_i) = \alpha_j(\alpha_{ij}(y_i)) = \alpha_j(0) = 0$.

23. $J = \{j_1, \ldots, j_m\}, J' = \{j_1, \ldots, j_m, j_{m+1}, \ldots, j_n\}$ とする．このとき A 代数準同型 $\mu_{JJ'}\colon B_J \to B_{J'}$ を，$b_1 \in B_{j_1}, \ldots, b_m \in B_{j_m}$ に対し $\mu_{JJ'}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_m) := b_1 \otimes \cdots \otimes b_m \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ と定めると $(B_J, \mu_{JJ'})$ は順系になる．このとき問題 21 より B は環であり，合成 $A \to B_J \to B$ により自然に A 代数の構造が入る．実際，$\mu_{JJ'}$ が A 代数準同型であることより図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & B_J \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{JJ'}"] & B \\
& B_{J'} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．

[*30] $\mathfrak{N}_i$ は環ではない (よってその上の積は考えない) ことを強調するためにこのような (少しくどい) 証明にした．β_i が積を保つことを利用する場合には，そのことを先に証明しておく必要がある．

3　商環と商加群

4　準素分解

5　整従属と付値

6　連鎖条件

7　ネーター環

8　アルティン環

9　離散付値環とデデキント整域

10　完備化

11　次元論

参考文献

[1] M. F. Atiyah & I. G. MacDonald (新妻弘訳), 可換代数入門, 共立出版, 2006.

[2] 可換環入門を読んで, `https://sites.google.com/view/mathlife1`.

[3] Athanasios Papaioannou, *Solutions to Atiyah and MacDonald's Introduction to Commutative Algebra*, `https://dangtuanhiep.files.wordpress.com/2008/09/papaioannoua_solutions_to_atiyah.pdf`.

[4] 永田雅宜, 可換体論, 裳華房, 1967.

[5] Q. Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, Oxford University Press, 2002.

[6] Pieter Belmans, Atlas of Spec $\mathbb{Z}[x]$, `http://pbelmans.ncag.info/blog/atlas/`.

[7] R. Hartshorne (高橋宣能・松下大介訳), 代数幾何学 1, 丸善出版, 2013.

変更履歴

2017/06/18　1 章まで

2018/02/12　1 章の問題 3, 9, 18, 20, 21, 23, 24, 25 を修正

2018/08/30　2 章問題 19 まで

2019/02/18　2 章問題 23 まで