Cantor 空間における Banach-Mazur ゲーム *

y.†

2019 年 12 月 12 日

最終更新日: 2019 年 12 月 12 日

概要

Banach-Mazur ゲームは topological game と呼ばれる無限ゲームの一種である．本稿では簡単のため Cantor 空間 2^ω に限った Banach-Mazur ゲームについて考察し，必勝戦略の存在の特徴付けを行う．

注: 本稿では補集合を上線を用いて $\overline{A}$ と表す．また，差集合はマイナス記号を用いて $A - B$ で表す．

1　準備

1.1　$\{0, 1\}$ の無限列の空間としての Cantor 空間

まず，本稿の舞台となる Cantor 空間の定義から始める．

定義 1.1 (Cantor 空間).　自然数全体の集合を $\omega := \{0, 1, 2, \dots\}$ で表す．**Cantor 空間** (Cantor space) とは，ω の冪集合 $2^\omega := \{\, X \mid X \subseteq \omega \,\}$ を台集合とする位相空間であり，位相は離散空間 $2 = \{0, 1\}$ の直積位相で与えられる．

$2 = \{0, 1\}$ の有限列全体の集合を $2^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} 2^n$ で表す．Cantor 空間 2^ω の元は長さが無限の列と見ることができる．有限列 $\sigma \in 2^{<\omega}$ と有限または無限の列 $\tau \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$ に対し，

- σ が τ の始切片 (initial segment) であることを $\sigma \preccurlyeq \tau$ で表す．
- $\sigma \prec \tau$ と書いたら $\sigma \preccurlyeq \tau$ かつ $\sigma \neq \tau$ であることを意味するものとする．
- σ の後ろに τ を連結してできる列を $\sigma ^\frown \tau$ で表す．

有限または無限の列 $\sigma \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$ の $n \in \omega$ 番目の値を $\sigma(n) \in 2$ で表す．有限列 $\sigma \in 2^{<\omega}$ の長さを $|\sigma|$ で表す．

直積位相の定義から，Cantor 空間 2^ω の開基は有限列 $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し

$$[\![\sigma]\!] := \{\, f \in 2^\omega \mid \sigma \prec f \,\}$$

という形で与えられる．ここで，$[\![\sigma]\!]$ は開かつ閉集合である．

---

* 本稿は Mathematical Logic Advent Calendar 2019 の 12 日目の記事です．

† `http://iso.2022.jp/`

Cantor 空間 2^ω の位相は次の距離によっても定めることができる．任意の $f,g \in 2^\omega$ に対し，

$$d(f,g) := \begin{cases} 2^{-\min\{\, n\in\omega \mid f(n)\neq g(n)\,\}} & \text{if } f \neq g, \\ 0 & \text{if } f = g \end{cases}$$

と定義する．この d によって Cantor 空間 2^ω が完備距離空間となることを確かめるのは難しくない．実際には d は**超距離** (ultrametric) であり，各 $\sigma \in 2^\omega$ について，$[\![\sigma]\!]$ は任意の $f \in [\![\sigma]\!]$ を中心とする半径 $2^{-|\sigma|}$ の開球である．

1.2 Baire 範疇 (Baire category)

定義 1.2 (疎集合，痩集合). X を位相空間とする．

- X の部分集合 $N \subseteq X$ が**疎** (nowhere dense) であるとは，その閉包が内点を持たないこと，すなわち $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(N)) = \emptyset$ となることをいう．
- X の部分集合 $M \subseteq X$ が**痩集合** (meager set) であるとは，M が疎集合の可算和で表されることをいう．部分集合 $C \subseteq X$ が**補痩集合** (comeager set) または **residual set** であるとは，補集合 $\overline{C}$ が痩集合であることをいう．

X の痩集合全体を $\mathcal{M}$ で表す．

注意 1.3. 定義から，疎集合の部分集合は疎集合であり，よって痩集合についてもそうである．また痩集合の可算和も痩集合である．これは集合論の言葉で言えば，$\mathcal{M}$ が X の部分集合全体の中で **σ イデアル** (σ-ideal) をなすということに他ならない．

定理 1.4 (Baire の範疇定理 (Baire category theroem)). 完備距離空間 X において，X の空でない任意の開集合は痩集合ではない．特に，任意の痩集合 $M \subseteq X$ に対し，$M \neq X$ が成り立つ．

Cantor 空間 2^ω は完備距離空間なので Baire の範疇定理 1.4 が成り立つ．

定義 1.5 (Baire の性質). X を位相空間とする．部分集合 $B \subseteq X$ が **Baire の性質** (property of Baire) を持つ，または**ほとんど開** (almost open) な集合であるとは，ある開集合 $U \subseteq X$ が存在して $B \triangle U \in \mathcal{M}$ となることをいう (ここで $B \triangle U := (B - U) \cup (U - B)$ は対称差)．

Baire の性質を持たない集合については 4 節で議論する．

2 Banach-Mazur ゲームの定義

定義 2.1 (Banach-Mazur ゲーム). Cantor 空間 2^ω の部分集合 $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ を固定する．$\mathcal{A}$ に関する **Banach-Mazur ゲーム** (Banach-Mazur game) ($\mathrm{BM}(\mathcal{A})$ で表す) とは，2 人のプレイヤー I，II によってプレイされる無限ゲームであり，各プレイヤーは交互に文字列 $\sigma_s \in 2^{<\omega}$ を $\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \sigma_3 \prec \cdots$ となるように選んでいく．最終的にできあがる無限列 $f := \bigcup_{s\in\omega} \sigma_s \in 2^\omega$ を**プレイ結果** (play) という．このプレイ結果 f について

- $f \in \mathcal{A}$ ならばプレイヤー I の勝ち，
- $f \notin \mathcal{A}$ ならばプレイヤー II の勝ち

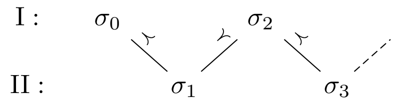

図 1　Banach-Mazur ゲーム

とする．

幾何的な視点では，Banach-Mazur ゲームは開球の減少列 $[\![\sigma_0]\!] \supsetneq [\![\sigma_1]\!] \supsetneq \cdots$ を交互に選んでいくゲームと思うことができる．この減少列の極限 $\bigcap_{s\in\omega}[\![\sigma_s]\!] \subseteq 2^\omega$ は $\bigcup_{s\in\omega}\sigma_s \in 2^\omega$ のみからなる 1 点集合となる．

定義 2.2 (必勝戦略). Banach-Mazur ゲームにおけるプレイヤー I の**戦略** (strategy) とは，写像 $\alpha\colon \bigcup_{s\in\omega}(2^{<\omega})^{2s} \to 2^{<\omega}$ であって，任意の $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{2s-1}) \in (2^{<\omega})^{2s}$ に対し $\sigma_{2s-1} \prec \alpha(\vec{\sigma})$ をみたすもののことである．プレイヤー II の戦略 $\beta\colon \bigcup_{s\in\omega}(2^{<\omega})^{2s+1} \to 2^{<\omega}$ も同様に定義される．

プレイヤー I, II がそれぞれ戦略 α, β に沿ってプレイしたときにできあがるプレイ結果 $f \in 2^\omega$ を $\alpha * \beta$ で表す．プレイヤー I の戦略 α が $\mathrm{BM}(\mathcal{A})$ に対する**必勝戦略** (winning strategy) であるとは，プレイヤー II の任意の戦略 β に対し $\alpha * \beta \in \mathcal{A}$ となることをいう．同様に，プレイヤー II の戦略 β が $\mathrm{BM}(\mathcal{A})$ に対する必勝戦略であるとは，プレイヤー I の任意の戦略 α に対し $\alpha * \beta \notin \mathcal{A}$ となることをいう．これらを記号で

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) &:\Longleftrightarrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) \text{ に対するプレイヤー I の必勝戦略が存在する}, \\
\mathrm{II} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) &:\Longleftrightarrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) \text{ に対するプレイヤー II の必勝戦略が存在する}
\end{aligned}$$

と表すことにする．[*1] $\mathrm{BM}(\mathcal{A})$ が**決定的である** (determined) とは，$\mathrm{I} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A})$ または $\mathrm{II} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A})$ であることをいう．[*2]

例 2.3. Cantor 空間 2^ω の部分集合 $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ を

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in 2^\omega \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} \in \mathbb{Q} \right\}$$

と定義する．この $\mathcal{A}$ に対し，$\mathrm{II} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A})$ である．

証明. 小数展開に関するよく知られた事実により，任意の $f \in 2^\omega$ に対し

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{A} &\iff f \text{ が循環節を持つ} \\
&\iff \exists \sigma, \tau \in 2^{<\omega}[f = \sigma ^\frown \tau ^\frown \tau ^\frown \tau ^\frown \cdots]
\end{aligned}$$

である．Cantor の対関数を $\langle m, n\rangle := (m+n)(m+n+1)/2 + n$ とおく．各 $m, n \in \omega$ に対し，

$$\mathcal{A}_{\langle m,n\rangle} := \{\, f \in 2^\omega \mid \exists \sigma, \tau \in 2^{<\omega}[|\sigma| = m, |\tau| = n, f = \sigma ^\frown \tau ^\frown \tau ^\frown \cdots]\,\}$$

とおく．このように定義すると $\mathcal{A} = \bigcup_{s\in\omega}\mathcal{A}_s$ が成り立つ．プレイヤー II は各 s について $[\![\sigma_{2s+1}]\!] \cap \mathcal{A}_s = \emptyset$ となるようにプレイしていけばよい．詳しくは，次のようにする．

1. $s = \langle m, n\rangle$ となる唯一の $m, n \in \omega$ をとる．

[*1] この記法は [Tel87] からとった．

[*2] 将棋や囲碁，チェスなどの有限ゲームは必ず決定的であるのに対して，無限ゲームの場合にはどちらのプレイヤーにも必勝戦略が存在しないことがありえる．

2. σ_{2s} を適当に延長して (例えば後ろに 0 をいくつか付け加えて)，$|\sigma| \equiv m \pmod{n}$ となるように $\sigma \succ \sigma_{2s}$ を作る．
3. σ の後ろに 0 を n 個，さらにその後ろに 1 を n 個付け加えて $\sigma_{2s+1} := \sigma ^\frown 0^n 1^n$ とおく．

この戦略に従ってプレイすれば任意の $f \succ \sigma_{2s+1}$ に対して $f \notin \mathcal{A}_s$ となることは明らかであろう．よって $\mathrm{II} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A})$ となる． □

3 Banach-Mazur ゲームの必勝戦略の存在の特徴付け

定理 3.1. Cantor 空間の任意の部分集合 $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) &\iff \text{ある } \sigma \in 2^{<\omega} \text{ が存在し，} \mathcal{A} \cap [\![\sigma]\!] \text{ は } [\![\sigma]\!] \text{ において補痩集合,} \\ \mathrm{II} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) &\iff \mathcal{A} \text{ は痩集合.} \end{aligned}$$

よって特に，$\mathcal{A}$ が Baire の性質を持てば $\mathrm{BM}(\mathcal{A})$ は決定的である．

証明. [Mos09, 6A.14] に沿って示す．まず「$\mathrm{II} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) \iff \mathcal{A}$ は痩集合」を示す．

($\Longleftarrow$) 仮定より可算個の疎集合の族 $(\mathcal{N}_n)_{n \in \omega}$ が存在して $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{N}_n$ と書ける．II は次のような戦略に沿ってプレイすればよい．I の直前の手が σ_{2s} であるとき，$\mathrm{Cl}(\mathcal{N}_s)$ も疎集合だから Baire の範疇定理より $[\![\sigma_{2s}]\!] - \mathrm{Cl}(\mathcal{N}_s)$ は空でない開集合である．よって $[\![\sigma_{2s+1}]\!] \cap \mathcal{N}_s = \emptyset$ となるような $\sigma_{2s+1} \succ \sigma_{2s}$ をとることができる (図 2)．これを繰り返せば $f = \bigcup_{s \in \omega} \sigma_s \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\mathcal{N}_n} = \overline{\mathcal{A}}$ となる．

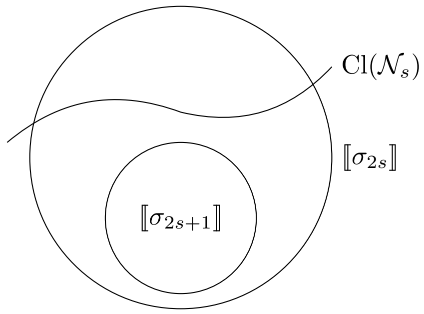

図 2 $\mathcal{N}_s$ を避けるように σ_{2s+1} を選ぶ

($\Longrightarrow$) II の必勝戦略 $\beta\colon \bigcup_{s \in \omega} (2^{<\omega})^{2s+1} \to 2^{<\omega}$ をとる．任意に $f \in 2^\omega$ をとる．文字列の偶数長の増加列 $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{2s+1}) \in (2^{<\omega})^{2s+2}$ が f **について良好である** (good for f) とは，I のある戦略 α が存在して，

$$\begin{aligned} \alpha((())) &= \sigma_0, \\ \beta((\sigma_0)) &= \sigma_1, \\ \alpha((\sigma_0, \sigma_1)) &= \sigma_2, \\ &\cdots \\ \beta((\sigma_0, \ldots, \sigma_{2s})) &= \sigma_{2s+1} \prec f \end{aligned}$$

となることとする．

主張 3.2. f について良好な任意の $\vec{\sigma}$ に対して，f について良好な延長 $\vec{\tau} \succ \vec{\sigma}$ がとれると仮定する．このとき，プレイヤーIのある戦略 α が存在して $\alpha * \beta = f$ となる．よって β がプレイヤーIIの必勝戦略であることから $f \notin \mathcal{A}$ である．

証明. 仮定より任意の s に対してプレイヤーIの戦略 α_s と長さ $2s+2$ の $\vec{\sigma}_s$ が存在して，α_s と β に沿ってプレイすると $\vec{\sigma}_s$ が生成されるようにできる．よって，長さ $2s+2$ 以下の $\vec{\sigma}$ に対して $\alpha(\vec{\sigma}) := \alpha_{s+1}(\vec{\sigma})$ とおけば $\alpha * \beta = f$ となる． □

上の主張から，各 $f \in \mathcal{A}$ に対し，f について良好な $\vec{\sigma}$ の中で ($\prec$ に関して) 極大なものが存在する．このような $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{2s+1})$ に対して，

$$\mathcal{B}(\vec{\sigma}) := [\![\sigma_{2s+1}]\!] - \bigcup_{\sigma \succ \sigma_{2s+1}} [\![\beta(\vec{\sigma}^\frown \sigma)]\!]$$

と定義する．すると $\mathcal{B}(\vec{\sigma})$ は閉集合から開集合を引いているので閉集合であり，また任意の $\sigma \succ \sigma_{2s+1}$ に対し，$\sigma \prec \beta(\vec{\sigma}^\frown \sigma)$ であることより内部を持たない．よって $\mathcal{B}(\vec{\sigma})$ は疎集合である．さらに，$\vec{\sigma}$ の極大性から $f \in \mathcal{B}(\vec{\sigma})$ が成り立つ．よって f の任意性から $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{\vec{\sigma}} \mathcal{B}(\vec{\sigma})$ となるので $\mathcal{A}$ は痩集合である ($f \in \mathcal{A}$ のとり方は非可算通りあるかもしれないが，そこから定まる $\vec{\sigma}$ の可能性は可算通りしかないことに注意しよう)．

次に，「$\mathrm{I} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A}) \iff$ ある $\sigma \in 2^{<\omega}$ が存在し，$\mathcal{A} \cap [\![\sigma]\!]$ は $[\![\sigma]\!]$ において補痩集合」を示す．プレイヤーIが最初の手 $\sigma_0 \in 2^{<\omega}$ を選んだ後，プレイヤーIとIIの立場を入れ換えて考えることにより，「Iが先手，IIが後手の，2^ω における $\mathcal{A}$ に関するBanach-Mazurゲーム」を「IIが先手，Iが後手の，$[\![\sigma_0]\!]$ における $\overline{\mathcal{A}} \cap [\![\sigma_0]\!]$ に関するBanach-Mazurゲーム」とみなすことができる．(ここで，各開基 $[\![\sigma]\!]$ は写像 $2^\omega \to [\![\sigma]\!]; f \mapsto \sigma^\frown f$ によりCantor空間 2^ω と同相であることに注意せよ．) よって $\mathrm{I} \uparrow \mathrm{BM}(\mathcal{A})$ となるためには，ある $\sigma_0 \in 2^{<\omega}$ が存在して，$\overline{\mathcal{A}} \cap [\![\sigma_0]\!]$ が $[\![\sigma_0]\!]$ において痩集合となることが必要かつ十分である． □

4 決定的でない集合は？

定理3.1より，$\mathcal{A}$ がBaireの性質を持てば $\mathrm{BM}(\mathcal{A})$ が決定的であることを見た．したがって，$\mathrm{BM}(\mathcal{A})$ が決定的でないような $\mathcal{A}$ を作るためには，少なくともBaireの性質を持たない部分集合 $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ を見つける必要があるということである．

そのような $\mathcal{A}$ は選択公理を用いれば容易に構成することができる．

事実 4.1 (cf. [Kec95, (8.48) Theorem]). 2^ω 上の任意の整列順序 $\leq \subseteq 2^\omega \times 2^\omega \cong 2^\omega$ はBaireの性質を持たない．

また，選択公理より弱いBPI (Boolean Prime Ideal theorem) だけからも構成することができる．

事実 4.2 (cf. [Kec95, (8.50) Exercise]). $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ を ω 上の**非単項超フィルター** (nonprincipal ultrafilter) とする．このとき，$\mathcal{U}$ はBaireの性質を持たない．

とはいえ，選択公理やBPIなどの超越的な存在原理によって作られる部分集合は「具体的」な集合とは程遠い．もっと簡単で具体的な例はないだろうか？ 少なくとも，2^ω の任意のBorel集合はBaireの性質を持つ

ことが確かめられるので，それより複雑な集合でなければならない．それどころか，実際には Shelah によって次の事実が証明されているようである．

事実 4.3 (Shelah [She84, 7.17. Conclusion], 1984). ZF が無矛盾ならば ZF + 「全ての $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ は Baire の性質を持つ」も無矛盾である．[*3]

この事実によれば，Banach-Mazur ゲームが決定的とならないような集合を超越的な原理を用いずに具体的に構成することはできないということになる．残念．

参考文献

[GAP17] Eureka GAP (2017), ゲームと現代集合論, `https://eurekagap.up.seesaa.net/image/game_and_set_theory.pdf`.

[Kec95] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, GTM **156**, Springer, 1995.

[Mos09] Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, Mathematical surveys and monographs, Amer. Math. Soc., 2009, `https://www.math.ucla.edu/~ynm/lectures/dst2009/dst2009.pdf`.

[She84] S. Shelah, Can you take Solovay's inaccessible away?, *Israel J. Math.* **48** (1984) 1–47, `https://doi.org/10.1007/BF02760522`.

[Soa16] R. I. Soare, *Turing Computability: Theory and Applications*, Springer, 2016.

[Tel87] R. Telegársky, Topological games: On the 50th anniversary of the Banach Mazur game, *Rocky Mountain J. Math.* **17** no. 2 (1987) 227–276, `https://doi.org/10.1216/RMJ-1987-17-2-227`.

変更履歴

2019/12/12　公開

[*3] これと先の事実を合わせると，選択公理や BPI が ZF から独立であることも言える (牛刀割鶏の感は否めないが).